

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

FABRICIO SCHIAVON KOLBERG

GRAFOS BI-ARCO-CIRCULARES

CURITIBA

2015

FABRICIO SCHIAVON KOLBERG

GRAFOS BI-ARCO-CIRCULARES

Dissertação de mestrado apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Informática no Programa de Pós-Graduação em Informática, Departamento de Informática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Renato Carmo

Coorientador: Profa. Marina Groshaus

CURITIBA

2015

K81g

Kolberg, Fabrício Schiavon

Grafos bi-arco-circulares/ Fabrício Schiavon Kolberg. – Curitiba, 2015.
57 f. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas,
Programa de Pós-graduação em Informática, 2015.

Orientador: Renato Carmo – Co-orientador: Marina Groshaus.
Bibliografia: p. 56-57.

1. Grafos (Sistema de computador). 2. Complexidade computacional. 3.
Teoria dos conjuntos. I. Universidade Federal do Paraná. II. Carmo, Renato.
III. Groshaus, Marina . IV. Título.

CDD: 511.50113

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em INFORMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **FABRICIO SCHIAVON KOLBERG**, intitulada: "**Grafos Bi-Arco-Circulares**", após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua ~~APROVAÇÃO~~....., completando-se assim todos os requisitos previstos nas normas desta Instituição para a obtenção do Grau de **Mestre em INFORMÁTICA**.

Curitiba, 04 de Fevereiro de 2016.



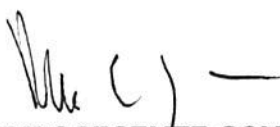
Prof RENATO JOSÉ DA SILVA CARMO (UFPR)
(Presidente da Banca Examinadora)



Prof JAYME LUIZ SZWARCFITER (UFRJ)



Prof MARINA ESTHER GROSHAUS (UBA)



Prof MURILO VICENTE GONÇALVES DA SILVA (UTFPR)



RESUMO

Um modelo bi-arco-circular é uma tripla $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ onde C é um círculo, e \mathbb{I}, \mathbb{E} são duas famílias de arcos sobre C . O grafo correspondente ao modelo $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é o grafo tal que para cada arco de $\mathbb{I} \cup \mathbb{E}$ existe um vértice, e dois vértices são vizinhos se e somente se os seus arcos correspondentes intersectam e um deles está em \mathbb{I} e outro em \mathbb{E} . Um grafo é dito bi-arco-circular se é o grafo correspondente a algum modelo bi-arco-circular. A classe dos grafos bi-arco-circulares foi até hoje pouco estudada, e não se conhece a complexidade computacional do seu reconhecimento. O estudo dessa classe é de interesse devido à mesma ser uma generalização intuitiva do conceito de grafos de bi-intervalo e uma adaptação bipartida do conceito de grafos arco-circulares, e pelas aplicações práticas que podem vir a emergir ao se estudar a estrutura das bicliques contidas em grafos da classe. Nesta dissertação, estudamos grafos bi-arco-circulares com um foco em descobrir propriedades estruturais da classe e de suas subclasses, com a intenção de explicitar resultados que possam ser úteis na descoberta de novas caracterizações. Além disso, também estudamos brevemente a relação da classe com outras classes semelhantes, bem como as subclasses bi-arco-circulares própria e Helly.

Palavras-chave: grafos bi-arco-circulares. grafos bi-arco-circulares Helly. grafos bi-intervalo. grafos bipartidos. grafos coroa. complexidade de reconhecimento.

ABSTRACT

A bi-circular-arc model is a triple $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ in which C is a circle, and \mathbb{I}, \mathbb{E} are two families of arcs over C . The corresponding graph of $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ is a graph in which for each arc in $\mathbb{I} \cup \mathbb{E}$ there is a vertex, and a pair of vertices are connected by an edge if and only if the arcs they correspond to intersect and one of them is in \mathbb{I} while the other is in \mathbb{E} . A graph is said to be bi-circular-arc (also called circular arc bigraph in certain publications) if it is the corresponding graph of one or more bi-circular-arc models. The bi-circular-arc class of graphs is yet to be extensively studied, and the computational complexity of its recognition is unknown. Studying this class is of some interest, mostly due to it being an intuitive generalization of the concept of interval bigraphs and a bipartite adaptation of circular-arc graphs, as well as the potential practical applications that may emerge from the study of the biclique structures of graphs in the class. In this dissertation, we study bi-circular-arc graphs with a focus on the structural properties of the class and a handful of its subclasses, aiming to display results that may be useful in the discovery of new characterizations in the future. Other than that, we also briefly studied the relationship between the class and other similarly defined classes, as well as proper and Helly bi-circular-arc subclasses.

Key-words: bi-circular-arc graphs. circular-arc bigraphs. Helly bi-circular-arc graphs. interval bigraphs. bipartite graphs. crown graphs. complexity of recognition.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de grafo arco-circular e seu modelo	11
Figura 2 – Exemplo de grafo bi-arco-circular e seu modelo	12
Figura 3 – Exemplo de um grafo bipartido B e seu \hat{B} correspondente.	18
Figura 4 – (BASU et al., 2013) As submatrizes quadradas de $A(C_1)$ e $A(C_2)$ que contém apenas 1s	23
Figura 5 – Os grafos coroas generalizados S_2^6 , S_2^5 e S_0^4	29
Figura 6 – Os grafos excluídos X_2^5 , X_1^5 e X_3^6	31
Figura 7 – O grafo excluído X_1^4	32
Figura 8 – Os grafos A_1 , A_2 , A_3 e A_4	34
Figura 9 – O A_3 induzido em X_1^n para $n > 4$	36
Figura 10 – O A_4 induzido em X_2^5	36
Figura 11 – O A_3 induzido em X_2^n para $n > 5$	37
Figura 12 – O A_4 induzido em X_{n-3}^n para $n > 5$	38
Figura 13 – O A_4 induzido em X_k^n para $n > 5$ e $n - k - 1 \leq k < n - 3$	38
Figura 14 – O A_3 induzido em X_k^n para $n > 5$ e $2 < k < n - k - 1 \leq n - 3$	39
Figura 15 – O grafo forquilha, e um modelo bi-arco-circular do mesmo demonstrando que o mesmo satisfaz a definição de Pr_2	46
Figura 16 – Os grafos $K_{2,2}$ e P_5 e, acima deles, seus modelos bi-intervalo Helly.	48
Figura 17 – O grafo dominó juntamente com seu modelo bi-arco-circular Helly, com os pontos biclique marcados.	48
Figura 18 – Um modelo de C_6 construído pelo algoritmo 2, com os pontos p assina- lados no círculo	52
Figura 19 – Modelo bi-arco-circular Helly do grafo resultante de se remover o vértice 5 do grafo forquilha	53

SUMÁRIO

1	DEFINIÇÕES	10
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
2.1	Estudo e Revisão do Resultado de Basu et al.	14
3	RESULTADOS	27
3.1	Estudo da Classe, Propriedades e Caracterização	27
3.2	Relação com Outras Classes	41
3.2.1	Grafos Arco-Circulares Bipartidos	41
3.2.2	Grafos Bi-Intervalo	42
3.3	Complexidade Computacional de Reconhecimento	44
3.4	Subclasses da classe Bi-Arco-Circular	45
3.4.1	Duas Definições da Subclasse Própria	45
3.4.2	A Subclasse Helly	46
	Referências	57

INTRODUÇÃO

Esta dissertação tem como objeto de estudo a classe de grafos bipartidos conhecida como *grafos bi-arco-circulares*. A classe em questão tem uma definição simples, mas pouco foi estudado sobre a mesma até o momento e a complexidade de seu reconhecimento permanece desconhecida. As poucas caracterizações já publicadas ([SEN; DAS; WEST, 1989](#); [BASU et al., 2013](#)) não se prestam, em primeira inspeção, à descoberta de um algoritmo polinomial de reconhecimento.

A definição de grafos bi-arco-circulares é análoga, como o nome indica, à definição de grafos *arco-circulares*, ou seja, a classe dos grafos de interseção de uma família de arcos sobre um círculo. No caso dos grafos bi-arco-circulares, a definição inclui duas famílias de arcos com um vértice correspondente a cada arco e arestas ocorrendo entre vértices se os arcos correspondentes a eles possuem interseção não-vazia e estão em famílias diferentes. Definições mais claras e formais são dadas no Capítulo 2.

Uma das principais motivações para este trabalho foi a investigação de propriedades estruturais de grafos da classe que possam auxiliar na descoberta de um algoritmo eficiente de reconhecimento e a descoberta de uma caracterização concisa baseada nas propriedades estruturais dos grafos da classe. Ao longo do trabalho, várias propriedades da classe foram descobertas, juntamente com alguns grafos proibidos.

Estudamos, também, a prova de um resultado de ([BASU et al., 2013](#)), e a reescrevemos com o intuito de torná-la mais clara e compreensível. Além disso, estudamos a relação da classe bi-arco-circular com outras classes de definição semelhante, como as classes bi-intervalo e arco-circular.

Também dentre os trabalhos que desenvolvemos está o estudo de algumas subclasses de importância dos grafos bi-arco-circulares, incluindo a subclasse bi-arco-circular própria, na qual arcos propriamente contidos não são permitidos, e bi-arco-circular Helly, com uma definição análoga à de famílias Helly. O estudo das subclasses em questão também teve como objetivo a descoberta de propriedades estruturais que possam levar a novas caracterizações.

COMO ESTÁ ORGANIZADA ESTA DISSERTAÇÃO

No **Capítulo 1**, fazemos um apanhado das definições básicas que serão utilizadas ao longo do resto da dissertação. Lá estão formalmente definidos grafos arco-circulares, grafos bi-arco-circulares, e várias outras definições auxiliares que são úteis para lemas, provas e definições posteriores.

No **Capítulo 2**, fazemos uma breve revisão bibliográfica de resultados a respeito de grafos arco-circulares e grafos bi-arco-circulares, incluindo caracterizações, algoritmos e outros. Na **Seção 2.1** está contida uma versão revisada de uma caracterização de grafos bi-arco-circulares descoberta por Basu et al. ([BASU et al., 2013](#)) que re-escrevemos para deixar mais clara e concisa. Também discutimos brevemente a justificativa para a revisão que fizemos.

No **Capítulo 3**, apresentamos os resultados descobertos ao longo do estudo. O capítulo é dividido em três seções: na **Seção 3.1**, apresentamos nossos resultados sobre a classe bi-arco-circular, incluindo condições necessárias, condições suficientes, uma pequena lista de grafos proibidos, e uma conjectura de caracterização; na **Seção 3.2** estão os resultados do nosso breve estudo das relações de contenção entre a classe bi-arco-circular, os grafos bi-arco-circulares bipartidos e a classe bi-intervalo; na **Seção 3.3**, dissertamos brevemente a respeito do que se sabe da complexidade computacional do reconhecimento da classe bi-arco-circular, e demonstramos que o problema pertence a NP ; na **Seção 3.4**, mostramos nossos resultados sobre o estudo das subclasses bi-arco-circulares próprias (onde fornecemos duas definições, sendo uma delas de nossa autoria e outra previamente existente) e a subclasse bi-arco-circular Helly (cuja definição é de nossa autoria).

1 DEFINIÇÕES

Seja um grafo $G = (V, E)$, denotamos, para $v \in V$, o conjunto $N_G(v) = \{w \in V \mid \{v, w\} \in E(G)\}$, conhecido como *vizinhança* de v em G . Pode-se também omitir o subscrito G da notação, escrevendo-se $N(v)$, quando não é necessário especificar o grafo que contém o vértice v no contexto onde ele ocorre. Um vértice v é dito *isolado* se $N(v) = \emptyset$, e uma aresta $\{v, w\}$ é dita isolada se $N(v) - \{w\} = N(w) - \{v\} = \emptyset$.

Se $G = (V \cup W, E)$ é um grafo bipartido tal que, para todos $v \in V, w \in W$, tem-se $\{v, w\} \in E(G)$, G é dito *bipartido completo*. Se H é um grafo qualquer, um subgrafo induzido de H que seja bipartido completo maximal é dito *biclique*. Em algumas situações, o termo biclique também é utilizado para se referir ao conjunto de vértices que induzem um subgrafo bipartido completo maximal.

Para quaisquer valores $a, b > 0$, $K_{a,b}$ representa o grafo bipartido completo $(U \cup V, E)$ onde $U = \{u_1, \dots, u_a\}$ e $V = \{v_1, \dots, v_b\}$.

Para qualquer $n > 0$, P_n representa o grafo (V, E) onde $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ e $E = \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 0 \leq i < n-1\}$, e C_n representa o grafo (V, E') , onde $E' = E \cup \{\{v_{n-1}, v_0\}\}$. Grafos da forma P_n são chamados de “caminhos”, e grafos da forma C_n são chamados de “ciclos”.

Dizemos que um subconjunto $S' \subset S$, tal que $|S'| = k$, é *consecutivo* com relação a uma permutação (s_1, \dots, s_n) de S se, entre o primeiro e o último elementos de S' encontrados na permutação, ocorrem apenas elementos de S' .

Definimos recursivamente permutações cíclicas de uma sequência R de tamanho n do seguinte modo:

- R é uma permutação cíclica de R .
- Se (s_1, \dots, s_n) é uma permutação cíclica de R , então $(s_n, s_1, \dots, s_{n-1})$ também é.

Dizemos que um subconjunto $S' \subset S$, $|S'| = k$ é *circularmente consecutivo* com relação a uma permutação (s_1, \dots, s_n) de S se existe uma permutação cíclica de (s_1, \dots, s_n) na qual S' é consecutivo.

Seja C um círculo qualquer de comprimento n , define-se um ponto de C como o *ponto inicial* do círculo, podendo, assim, representar qualquer ponto sobre C como um

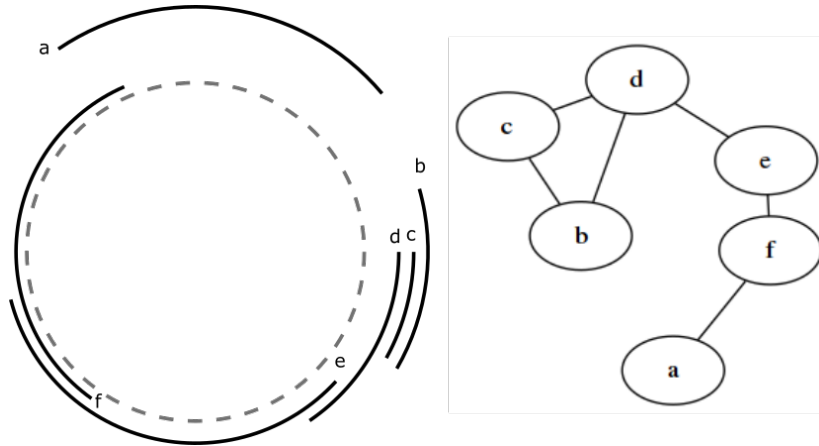


Figura 1 – Exemplo de grafo arco-circular e seu modelo

único número, correspondente ao deslocamento no sentido horário com relação ao ponto inicial que deve ser feito para chegar no ponto.

Um arco A sobre um círculo C pode ser descrito como um par de pontos sobre o círculo $(s(A), t(A))$, com $s(A)$ sendo o extremo anti-horário do arco, e $t(A)$ o seu extremo horário (ou seja, o arco é desenhado ao se traçar uma curva de $s(A)$ para $t(A)$ no sentido horário). Novamente, $s(A)$ e $t(A)$ são números referentes a um deslocamento no sentido horário com relação ao ponto inicial de C .

Uma família de conjuntos \mathbb{F} é dita *própria* se não existem $F, G \in \mathbb{F}$ tal que $F \subsetneq G$.

Se \mathbb{F} é uma família de conjuntos, o *grafo de interseção* de \mathbb{F} é o grafo construído ao se atribuir, para cada elemento $F \in \mathbb{F}$, um vértice v_F , tal que para quaisquer $F, F' \in \mathbb{F}$, uma aresta $\{v_F, v_{F'}\}$ ocorrendo se e somente se $F \cap F' \neq \emptyset$.

Um modelo arco-circular $\mathbb{M} = (C, \mathbb{A})$ é um par ordenado composto de um círculo C e um conjunto \mathbb{A} de arcos de C , de modo que o grafo correspondente ao modelo é o grafo de interseção do conjunto \mathbb{A} . Um grafo G é dito arco-circular se existe um modelo arco-circular tal que G é o grafo de interseção de \mathbb{A} .

A Figura 1 mostra um exemplo de grafo arco-circular construído a partir de um modelo arco-circular.

Um modelo bi-arco-circular $\mathbb{B} = (C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é uma tripla composta de um círculo C e dois conjuntos \mathbb{I} e \mathbb{E} de arcos sobre C . O grafo correspondente a um modelo bi-arco-circular é construído fazendo-se para cada arco dos dois conjuntos \mathbb{I} e \mathbb{E} um vértice, e uma aresta existe entre dois vértices se e somente se os arcos correspondentes aos vértices estão em conjuntos diferentes e possuem interseção não-vazia. Um grafo é bi-arco-circular se é um grafo correspondente a algum modelo bi-arco-circular. Equivalentemente, se G é

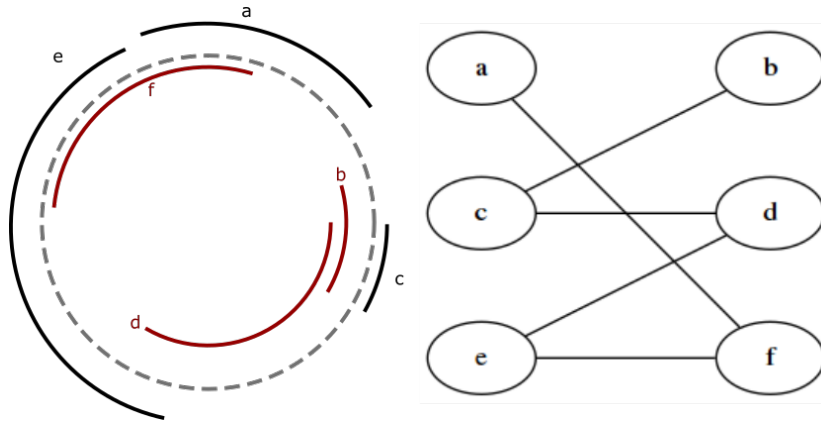


Figura 2 – Exemplo de grafo bi-arco-circular e seu modelo

correspondente a um modelo \mathbb{B} , dizemos que G *admite* o modelo \mathbb{B} . Claramente, grafos bi-arco-circulares são bipartidos, e a propriedade bi-arco-circular é hereditária para subgrafos induzidos.

Se temos um modelo bi-arco-circular $\mathbb{B} = (C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$, dizemos que \mathbb{I} é a família *oposta* a \mathbb{E} no modelo e vice-versa.

Tanto no caso de grafos arco-circulares quanto no caso de grafos bi-arco-circulares, todos os arcos são considerados, por padrão, abertos (ou seja, não contendo seus extremos).

Na Figura 2 há um exemplo de grafo bi-arco-circular construído a partir de um modelo bi-arco-circular. Os conjuntos \mathbb{I} e \mathbb{E} são coloridos de vermelho e preto, respectivamente.

Seja \mathbb{M} um modelo arco-circular. Denote por $G(\mathbb{M})$ o grafo correspondente a \mathbb{M} . A notação é usada do mesmo modo para modelos bi-arco-circulares, com $G(\mathbb{B})$ representando o grafo correspondente ao modelo bi-arco-circular \mathbb{B} .

Para um conjunto qualquer de arcos circulares, ϵ representa um valor menor do que a menor distância entre dois extremos não-coincidentes de arcos ($\epsilon = \frac{d}{4}$, onde d é a menor distância como mencionada, pode ser usado sem perda de generalidade) (SOULIGNAC, 2010).

Se \mathbb{X} é uma família de arcos circulares, $\overline{\mathbb{X}}$ é a família dos complementos dos arcos de \mathbb{X} .

Na bibliografia, é comum o uso do termo “circular arc bigraph” (ou bigrafo arco circular) para se referir à classe de grafos bi-arco-circulares. Em nosso trabalho, optamos por utilizar o termo “grafos bi-arco-circulares” para evitar que se confunda a classe estudada com grafos arco-circulares bipartidos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O conceito de grafos bi-arco-circulares é baseado diretamente no conceito de grafos arco-circulares, cujo problema de caracterização foi primeiro levantado em 1964. Na página 54 do livro *Combinatorial Geometry on the Plane* ([HADWIGER; DEBRUNNER, 1964](#)) existe um trecho escrito por Victor Klee a respeito das propriedades de grafos de intervalos, que cita como problema em aberto a caracterização de grafos arco-circular. Alguns anos depois, em 1969, Klee ([KLEE, 1969](#)) disserta sobre o problema em aberto da caracterização da classe de grafos de interseção de arcos sobre um círculo, citando o pouco que se conhecia a respeito da classe na época.

Um texto de Trotter e Moore, datado de 1976, contém resultados referentes a problemas de caracterização para diferentes tipos de objetos e, entre eles, alguns conjuntos infinitos de grafos induzidos proibidos para a classe de grafos arco-circulares, descobertos através de analogias com conjuntos parcialmente ordenados ([TROTTER JR.; MOORE JR., 1976](#)). McConnel, em 2003, apresenta um algoritmo de tempo linear para o reconhecimento da classe de grafos arco-circulares, baseado em resultados anteriores que apresentavam algoritmos de reconhecimento em tempo quadrático ([MCCONNELL, 2003](#)). Um texto de Hell e Huang, de 2004, contém resultados a respeito da relação entre grafos bi-intervalo e a classe *arco-circular dois-clique*, definida como a subclasse dos grafos arco-circulares cujo conjunto de vértices pode ser bipartido em duas cliques ([HELL; HUANG, 2004](#)).

Em sua tese de doutorado, Francisco Soulignac apresenta um conjunto de caracterizações parciais de diferentes subclasses de grafos arco-circulares descritas segundo um subconjunto de um conjunto de cinco propriedades que a classe satisfaz ([SOULIGNAC, 2010](#)). No conjunto, cada letra simboliza uma propriedade dentre as seguintes.

- A letra I simboliza grafos de intervalo (grafos arco-circulares que são também grafos de intervalo).
- A letra P simboliza grafos arco-circular próprios (grafos que admitem um modelo arco-circular sem arcos propriamente contidos).
- A letra U simboliza grafos arco-circular unitários (grafos que admitem um modelo arco-circular onde todos os arcos têm o mesmo comprimento).

- A letra H simboliza grafos arco-circular Helly (grafos que admitem um modelo arco-circular cujo conjunto de arcos satisfazem a propriedade de família Helly).
- A letra N simboliza grafos arco-circular normais (que admitem um modelo arco-circular onde não existe um par de arcos que cubra o grafo inteiro).

As caracterizações são parciais no sentido de que partem da premissa de que os grafos são arco-circulares, ou seja, afirmam que um grafo que já se sabe ser arco-circular pertence a alguma das subclasses citadas se e somente se ele apresenta certa propriedade.

Uma pesquisa de Lin e Szwarcfiter, que compila um conjunto de resultados referentes à caracterização e algoritmos de reconhecimento de grafos arco-circulares e várias subclasses (LIN; SZWARCFITER, 2009), levanta também o problema da caracterização de grafos bi-arco-circular, definindo a classe como a generalização de grafos bi-intervalo, onde os intervalos são substituídos por arcos sobre um círculo. Em 2013, Basu et al. apresentam caracterizações para grafos bi-arco-circulares e as subclasses própria (sem arcos propriamente contidos) e unitária (com todos os arcos tendo o mesmo comprimento), baseadas na estrutura de suas matrizes de bi-adjacência (BASU et al., 2013).

2.1 ESTUDO E REVISÃO DO RESULTADO DE BASU ET AL.

Durante nossos estudos, encontramos uma caracterização de grafos bi-arco-circulares em (BASU et al., 2013) que decidimos revisar para tornar mais clara e concisa. A caracterização em questão se baseia em *matrizes de biadjacência*, definidas a seguir.

Definição 1. *Seja $G = (X \cup Y, E)$ um grafo bipartido, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. A matriz de biadjacência M de G é uma matriz $m \times n$ tal que cada linha corresponde a um vértice de X , cada coluna corresponde a um vértice de Y , e $m_{a,b} = 1$ se e somente se o vértice correspondente à linha a é vizinho do vértice correspondente à coluna b , tendo-se $m_{a,b} = 0$ caso contrário.*

Uma matriz de biadjacência para um grafo bipartido pode ser particionada com o que é chamado de *partição em escada*.

Definição 2. *Se A é uma matriz $n \times m$ composta de valores 0, 1, então uma partição em escada de A é uma partição (L, U) de suas posições definida por um caminho poligonal do canto superior esquerdo para o inferior direito de modo que L é fechado para movimentos*

para baixo e para a esquerda, e U é fechado para movimentos para cima e para a direita. Desse modo, (L, U) é uma partição dos índices de matrizes $n \times m$ tal que, se i, j pertence a L , então, para todo $i' < i$ e $j' > j$, i', j e i, j' também pertencem, e se i, j pertence a U , então, para todo $i' > i$ e $j' < j$, i', j e i, j' também pertencem.

Um exemplo de partição em escada para uma matriz 4×5 é mostrado abaixo. A partição em escada daqui será chamada de “partição exemplo” para referência posterior.

$$\begin{pmatrix} U & U & U & U & U \\ L & L & U & U & U \\ L & L & L & U & U \\ L & L & L & L & U \end{pmatrix}$$

Seja uma matriz A composta de valores 0, 1, e (L, U) uma partição em escada de A . Seja também V_i a sequência de 1's circularmente consecutivos (ou seja, considerando a primeira coluna como sucessora da última) a partir do elemento acima da escada na linha i (ou seja, a partir do primeiro elemento U da linha i) seguindo para a direita, e W_j a sequência de 1's circularmente consecutivos (dessa vez com a primeira linha sendo sucessora da última) a partir do elemento abaixo da escada na coluna j (ou seja, a partir do elemento L da coluna j que possui um vizinho U acima) seguindo para baixo. Diz-se que A satisfaz a *propriedade generalizada dos 1's circulares* se admite uma partição em escada (L, U) de modo que os V_i 's e W_j 's cubram todos os seus 1's. Caso uma linha i seja composta inteiramente por elementos U , fazemos V_i começar da primeira coluna, e caso uma coluna j seja composta inteiramente de elementos L , fazemos W_j começar da primeira linha.

A seguir, um exemplo de matriz com a propriedade generalizada dos 1's circulares com relação à “partição exemplo”. Elementos sublinhados na linha i pertencem a V_i , e elementos em negrito na coluna j pertencem a W_j .

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \underline{1} & \underline{1} \\ \underline{1} & \underline{1} & 0 & \mathbf{1} & \underline{1} \end{pmatrix}$$

Com isso, é possível formular a seguinte caracterização, da qual a caracterização que revisamos depende.

Teorema 1. (*SEN; DAS; WEST, 1989*) *Um grafo bipartido é bi-arco-circular se e somente se sua matriz de biadjacência admite a propriedade generalizada de 1's circulares.*

É fácil construir um modelo bi-arco-circular a partir de uma matriz de biadjacência com a propriedade generalizada dos 1's circulares. Seja G um grafo bipartido com a matriz de biadjacência $M_{m \times n}$ admitindo a propriedade generalizada dos 1's circulares com relação à partição de escada (L, U) . Sejam $v_i, 0 \leq i < m$ os vértices correspondentes a cada linha, e $w_i, 0 \leq i < n$ os vértices correspondentes a cada coluna. A construção do modelo bi-arco-circular é descrita a seguir.

Começamos com C de comprimento $n + 1$, e marcamos uma sequência de $n + 1$ pontos no sentido horário em C como $p_{0,0}, \dots, p_{n,0}$, cada um a 1 de distância do anterior, que chamaremos de “pontos p ”. Inserimos $k - 1$ pontos adicionais consecutivos equidistantes entre $p_{i,0}$ e $p_{i+1,0}$, que chamaremos de $p_{i,1}, \dots, p_{i,k-1}$, quando existem $k > 1$ linhas em M tal que, na partição (L, U) , o elemento da linha na coluna i é U , mas o elemento na coluna imediatamente anterior é L , para $0 < i < n$. Similarmente, $k - 1$ pontos da mesma natureza são adicionados entre $p_{n,0}$ e $p_{0,0}$ quando existem $k > 1$ linhas compostas inteiramente por elementos L , e $k - 1$ entre $p_{0,0}$ e $p_{1,0}$ quando existem $k > 1$ linhas compostas inteiramente de elementos U .

Sejam V_i e W_j como descritos na definição da propriedade generalizada dos 1's circulares. Para cada vértice v_i , adicionamos, ao conjunto \mathbb{I} de arcos, o arco A_i , definido do seguinte modo.

Para o extremo anti-horário:

- Se a linha i for a j -ésima linha a ser composta inteiramente por L , seu extremo anti-horário será $p_{n,j-1}$
- Se a linha i for a j -ésima linha cujo primeiro elemento U começa na coluna k , seu extremo anti-horário será $p_{k,j-1}$.

Para o extremo horário:

- Se V_i for vazio, o extremo horário estará no ponto de meio do arco entre o extremo anti-horário e o próximo ponto p .
- Se V_i terminar na coluna k , o extremo horário estará no ponto $p_{k+1,0}$.

Para cada vértice w_i , agora, adiciona-se um arco B_i no conjunto \mathbb{E} com o extremo anti horário sendo o ponto de meio do arco entre $p_{i+1,0}$ e o ponto imediatamente anterior a ele. Caso W_i seja vazio, o extremo horário será $p_{i+1,0}$, caso contrário, sendo l a linha na qual W_i termina, o extremo horário será o ponto intermediário entre o extremo anti-horário de A_l e o ponto p imediatamente posterior a ele.

Na sequência, iremos provar que $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é um modelo bi-arco-circular de G , ou seja, que o arco A_i intersecta o arco B_j se e somente se a entrada i, j da matriz M é 1. Note, primeiro de tudo, que no sentido horário, partindo de $p_{0,0}$, os extremos anti-horários dos arcos de \mathbb{I} são encontrados na ordem das linhas que eles representam, e o mesmo vale para os extremos anti-horários de \mathbb{E} e a ordem das colunas.

Basta provar que B_j contém apenas (e todos) os extremos anti-horários de \mathbb{I} correspondentes a linhas contidas em W_j , e que A_i contém apenas (e todos) os extremos anti-horários de \mathbb{E} correspondentes a colunas de V_i , para $0 \leq i < m$ e $0 \leq j < n$.

Temos, primeiro de tudo, que W_j não é vazio se e somente se o arco B_j contém pelo menos um extremo anti-horário de \mathbb{I} . Como B_j , por definição, é tal que o primeiro extremo anti-horário de um arco de \mathbb{I} posterior a $s(B_j)$ é o extremo anti-horário do arco correspondente à linha na qual W_j começa, e o último extremo pelo qual B_j passa é do arco correspondente à linha na qual W_j termina, e a ordem dos extremos anti-horários dos arcos de \mathbb{I} (no sentido horário, partindo de $p_{0,0}$) obedece a ordem das linhas de M , temos que qualquer arco que represente uma linha que não está contida em W_j tem seu extremo anti-horário contido no arco $\overline{B_j}$, e qualquer arco que represente uma linha que está contida em W_j tem seu extremo anti-horário contido em B_j . Logo, A_i tem seu extremo anti-horário contido em B_j se e somente se a linha i está contida em W_j . A prova de que A_i contém o extremo anti-horário de B_j se e somente se V_i contém a coluna j é análoga, concluindo a prova.

Além do Teorema 1, a caracterização que revisamos depende também de algumas outras definições que apresentamos a seguir.

Um grafo é dito *dois-clique* se seus vértices podem ser bipartidos em dois conjuntos completos. Uma *matriz de Ferrers* é uma matriz que admite uma partição em escada (L, U) tal que todos os membros de L são 1, e todos os membros de U são 0.

A matriz de Ferrers relacionada à partição exemplo é a seguinte.

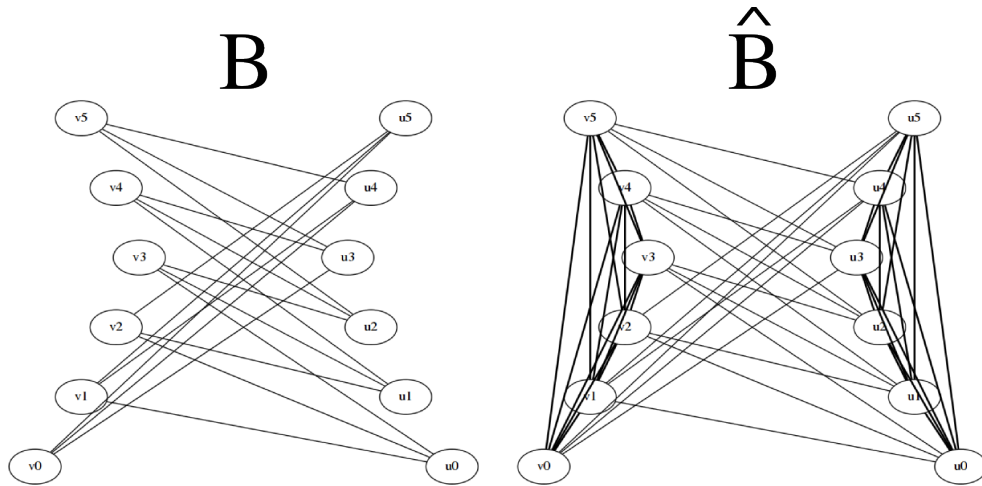


Figura 3 – Exemplo de um grafo bipartido B e seu \hat{B} correspondente.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $B = (V \cup W, E)$ é um grafo bipartido, então \hat{B} é o grafo $(V \cup W, E')$, onde $E' = E \cup \{\{v_1, v_2\} | v_1, v_2 \in V \vee v_1, v_2 \in W\}$.

A Figura 3 contém um exemplo de um grafo bipartido B e sua versão \hat{B} . A única diferença são as arestas mais grossas, adicionadas em \hat{B} entre pares de vértices que seriam do mesmo conjunto independente em B .

Se A é uma matriz $m \times n$ onde, para todo $0 < i \leq m$ e $0 < j \leq n$, tem-se $A_{i,j} = 0$ ou $A_{i,j} = 1$, então \bar{A} é a matriz $m \times n$ tal que $\bar{A}_{i,j} = 1 - A_{i,j}$.

Se G é um grafo de matriz de adjacência M , a *matriz de adjacência aumentada* de G é a matriz resultante de se substituir os elementos da diagonal de M por 1's.

Uma partição (L, U) é dita *fundamental* a uma matriz A se A satisfaz a propriedade generalizada dos 1's circulares com relação à partição e todos os elementos de L são 1 em A . Se M é a matriz de Ferrers para (L, U) , M é dita *fundamental* com relação a A . Se A é uma matriz de biadjacência de dimensões $m \times n$ do grafo bipartido $B = (U \cup V, E)$, com $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, onde as linhas de A representam os vértices $\{u_1, \dots, u_m\}$ e as colunas representam $\{v_1, \dots, v_n\}$, então a matriz de adjacência aumentada de \hat{B} , com linhas correspondendo respectivamente aos vértices organizados na sequência $(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n)$, é dita a matriz de adjacência fundamental a M .

A partição exemplo é fundamental à matriz A a seguir. Os elementos em negrito são os elementos L da partição exemplo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

Seja M a matriz de Ferrers fundamental à partição exemplo. Se B é o grafo bipartido que admite A como matriz de biadjacência, então a matriz a seguir é a matriz de adjacência de \hat{B} fundamental a M . Em negrito estão as porções da matriz correspondentes às cliques criadas pela adição de arestas entre pares de elementos dos conjuntos independentes de B .

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Analogamente à propriedade generalizada dos 1's circulares vista anteriormente, definimos, para matrizes de adjacência, a propriedade dos 1's quasi-circulares ([TUCKER, 1971](#)).

Definição 3. *Seja A uma matriz quadrada composta de valores 0, 1, e seja V_i a sequência de 1's circularmente consecutivos (ou seja, considerando a primeira coluna como sucessora da última) a partir da diagonal da linha i seguindo para a direita, e W_j a sequência de 1's circularmente consecutivos (dessa vez com a primeira linha sendo sucessora da última) a partir da diagonal da coluna j seguindo para baixo.*

Diz-se que A possui a propriedade dos 1's quasi-circulares se W_i e V_j , para todos i e j , cobrem todos os 1's de A .

A matriz de adjacência de \hat{B} no último exemplo apresentado admite a propriedade dos 1's quasi-circulares.

Lema 2. (*BASU et al., 2013; TUCKER, 1971*) *Um grafo G é arco-circular se e somente se ele admite uma matriz de adjacência com a propriedade dos 1's quasi-circulares.*

O artigo fornece até mesmo uma forma de construir um modelo arco-circular a partir de uma matriz de adjacência assim definida: num círculo cujo comprimento é igual ao número de vértices, para cada vértice v_i (onde v_i corresponde à linha i da matriz de adjacência), o arco que o representa começa no ponto do círculo correspondente ao índice i , e termina no ponto correspondente ao índice da coluna do último 1 consecutivo após a diagonal na linha i (BASU et al., 2013).

A definição de *grafos suplementares* a seguir é a última definição necessária para podermos formular a caracterização que revisamos.

Definição 4. *Sejam C_1 e C_2 dois grafos dois-clique arco-circulares com a mesma partição de conjuntos completos U e V , D_1 e D_2 os grafos bipartidos resultantes da remoção das arestas entre membros das partições em C_1 e C_2 , e A_1 e A_2 matrizes de biadjacência de D_1 e D_2 . C_1 e C_2 são ditos suplementares se existe uma matriz de Ferrers M tal que:*

1. M e \bar{M}^T são fundamentais a D_1 e D_2 respectivamente.
2. Na matriz de adjacência de C_1 fundamental a M , se, em uma linha qualquer, ocorre um 1 bem na primeira coluna sobre a qual há um 0 **abaixo da diagonal** (ou seja, ao longo dessa linha, a primeira coluna que possui um 0 acima dela em qualquer uma das linhas superiores, desde que abaixo da diagonal), então a matriz de adjacência de C_2 fundamental a \bar{M}^T tem a linha correspondente inteira 1. Analogamente para C_2 e C_1 .

Na sequência mostramos um exemplo de grafos suplementares. Sejam $A(D_1)$ e $A(D_2)$ as matrizes de biadjacência de D_1 e D_2 , respectivamente, com os elementos 1 das matrizes M e \bar{M}^T marcados em negrito. Apresentamos $A(D_1)$ e $A(D_2)$ a seguir.

$$A(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} \quad A(D_2) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

E a seguir, apresentamos as matrizes de adjacência de C_1 e C_2 fundamentais a M e \bar{M}^T respectivamente.

$$A(C_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{0} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{\underline{1}} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

As linhas em negrito em $A(C_1)$ marcam linhas que possuem um 1 na primeira coluna acima da qual ocorre um 0 abaixo da diagonal, e as linhas em negrito são as linhas correspondentes em $A(C_2)$ (correspondentes com relação ao vértice que representam, não ao índice da matriz).

Por fim, a caracterização que revisamos é apresentada a seguir, no Teorema 3.

Teorema 3. (*BASU et al., 2013*) Um grafo bipartido B é bi-arco-circular se e somente se \hat{B} pode ser obtido pela interseção de dois grafos dois-clique arco-circulares suplementares.

Demonstração. ¹ (\rightarrow) Seja B um grafo bipartido em conjuntos independentes U e V , e seja A sua matriz de biadjacência com a propriedade generalizada dos 1's circulares. Sejam, então, D_1 e D_2 dois grafos bipartidos tais que $A(D_1)$ é a matriz obtida ao se substituir todos os elementos abaixo da escada em A por 1, e $A(D_2)$ é a matriz obtida ao se substituir todos os elementos acima da escada em A por 1 e, em seguida, transpor a matriz. Suponha, também, que os vértices correspondentes a linhas em $A(D_1)$ são o conjunto U , e os vértices correspondentes a colunas em $A(D_1)$ são o conjunto V , e que a ordem dos vértices em $A(D_2)$ é transposta com relação a A . Seja M a matriz fundamental correspondente à partição de escada de A , então temos que M e \bar{M}^T são, respectivamente, fundamentais a $A(D_1)$ e $A(D_2)$.

Sejam $C_1 = \hat{D}_1$ e $C_2 = \hat{D}_2$. É fácil verificar que $\hat{B} = C_1 \cap C_2$, pois as únicas arestas que C_1 e C_2 terão em comum (além das arestas que completam as duas cliques) serão as arestas de B .

Basta, então, provar que C_1 e C_2 são arco-circulares e suplementares. Montemos, então, as matrizes $A(C_1)$ e $A(C_2)$, com 1's nas diagonais, onde a ordem dos vértices em $A(C_1)$ é a ordem dos vértices indexados em cada linha de D_1 (o conjunto U), seguido dos vértices indexados em cada coluna (o conjunto V), e a ordem dos vértices em $A(C_2)$ é a ordem análoga em D_2 (o conjunto V seguido do conjunto U). Note que isso faz com que as duas matrizes apresentem, cada uma, duas submatrizes quadradas, compostas inteiramente de 1s, nas regiões onde tanto as linhas quanto as colunas são do mesmo conjunto entre U e V . A Figura 4 mostra onde as submatrizes mencionadas ocorrem, note que as diagonais das matrizes estarão contidas nessas submatrizes.

Chamemos essas duas submatrizes de “quadrados” de $A(C_1)$ e $A(C_2)$. Logo abaixo do quadrado superior da diagonal, há $A(D_1)^T$ em $A(C_1)$ (respectivamente, $A(D_2)^T$ em $A(C_2)$), e à direita do mesmo quadrado, há $A(D_1)$ e $A(C_1)$ e $A(D_2)$ em $A(C_2)$.

Note, também, que as matrizes tem a propriedade dos 1's quasi-circulares (e portanto, C_1 e C_2 são arco-circulares), pois qualquer 1 que não esteja ou abaixo da escada ou nos “quadrados” (ou seja, nas regiões que necessariamente só contem 1's), está em

¹ A prova aqui apresentada é uma versão modificada da prova encontrada em (BASU et al., 2013), já que a prova original estava ambígua e parecia estar errada sob certas interpretações da definição de grafos suplementares.

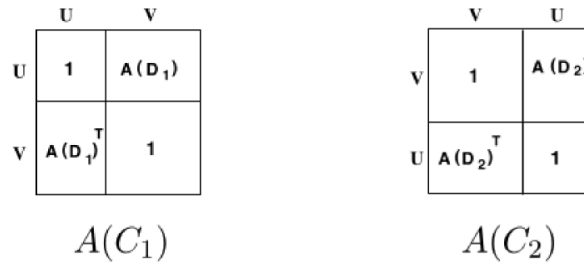


Figura 4 – (BASU et al., 2013) As submatrizes quadradas de $A(C_1)$ e $A(C_2)$ que contém apenas 1s

uma sequência de 1's que se inicia na escada, ou na primeira linha/coluna da matriz, em cujo caso, há uma sequência que começa na diagonal e o inclui circularmente (já que os “quadrados” vão da diagonal até as bordas).

Agora, basta provar que $A(C_1)$ e $A(C_2)$ obedecem a segunda propriedade da definição de suplementaridade.

Como o primeiro elemento de cada linha de $A(C_1)$ correspondente a um elemento do conjunto U é 1, temos que, se ocorrer uma linha tal que ela contenha um 1 logo na primeira coluna acima da qual ocorre um 0, ela está no conjunto V . Suponha que tal linha exista, e seja correspondente ao vértice v_j . Então, na matriz de biadjacência de B , a coluna correspondente a v_j começa com um 1, e na linha correspondente à coluna onde ocorre um 0 acima do 1, existe um 1 com um zero à sua esquerda, e acima da escada (pois em $A(D_1)$, todos os elementos abaixo da escada são 1). Como a matriz de biadjacência de B obedece a propriedade generalizada dos 1's circulares, existe uma sequência de 1's iniciada abaixo da escada na coluna de v_j que vai até a última linha (para englobar o 1 à direita do 0, que não poderá estar contido na sequência partindo da escada para a direita). A linha correspondente a v_j em $A(C_2)$, então, será composta inteiramente por 1's, pois, no caso de $A(D_2)$, todos os elementos *acima* da escada com relação à partição de B são 1, e os abaixo da escada, como acabamos de ver, também são todos 1. Um raciocínio análogo se aplica à verificação para a propriedade entre C_2 e C_1 .

Portanto, C_2 e C_1 são suplementares, e a sua interseção é igual a \hat{B} .

(\leftarrow) Sejam C_1 e C_2 dois grafos dois-clique arco-circulares suplementares, com partição-clique em conjuntos U e V . Sejam $D_1 = D(C_1)$ e $D_2 = D(C_2)$ os grafos bipartidos resultantes da remoção das arestas das cliques, e $A(D_1)$ e $A(D_2)$ as matrizes de biadjacência respectivas. Seja M a matriz de Ferrers tal que M e \bar{M}^T são fundamentais a $A(D_1)$ e $A(D_2)$, respectivamente. Sejam, então, $A(C_1)$ e $A(C_2)$ as matrizes de biadjacência fundamentais

a M e \bar{M}^T respectivamente, com $A(C_1)$ tendo a ordem de vértices nas linhas/colunas começando do conjunto U e seguido do conjunto V , e $A(C_2)$ começando do conjunto V seguido do conjunto U . Com essa configuração de linhas, seja A_1 a porção $U \times V$ de $A(C_1)$ e A_2 a porção $V \times U$ de $A(C_2)$.

Note que A_1 e A_2^T são, respectivamente, as matrizes de biadjacência de D_1 e D_2 com a mesma ordem de linhas/colunas. Note, também, que eles admitem a propriedade generalizada dos 1's circulares com relação à mesma partição de escada (caso contrário, C_1 e C_2 não seriam suplementares). Sejam as matrizes indexadas $A_1 = (x_{ij})_{m \times n}$ e $A_2^T = (y_{ij})_{m \times n}$, vamos provar que $A = (x_{ij}y_{ij})_{m \times n}$ admite a propriedade generalizada dos 1's circulares com relação à mesma partição em escada.

Seja $x_{ij} = 1$ tal que i é, em A_1 , a primeira linha na qual ocorre um 0 acima da escada à esquerda da coluna j , e seja v_j o vértice correspondente à coluna j na matriz de biadjacência. Se isso ocorrer, temos que a linha correspondente a v_j possui um 1 na primeira coluna acima na qual ocorre um 0 acima da linha em $A(C_1)$, o que implica, por sua vez que a linha correspondente a v_j em $A(C_2)$ é toda composta de 1's, logo, a coluna correspondente a v_j em A_2^T é composta inteiramente de 1's. Logo, em A , a coluna j é igual à coluna j de A_1 , e como A_1 tem a propriedade generalizada dos 1's circulares, x_{ij} se conecta à escada através da sequência circular de 1's partindo debaixo da escada para baixo. Um argumento análogo é utilizado para quando existe $y_{ij} = 1$ abaixo da escada com um 0 acima dele em A_2^T .

□

O problema encontrado na prova do teorema acima no texto original ([BASU et al., 2013](#)) é que, em uma primeira inspeção, a interpretação pretendida para o segundo item da definição de grafos suplementares (Definição 4) parece ser a seguinte:

Na matriz de adjacência de C_1 fundamental a M , na primeira coluna, se existe um 1 que possui um 0 acima dele (na mesma coluna, mas em uma linha superior), a linha onde há um 1 abaixo do 0 na matriz de adjacência de C_2 fundamental a \bar{M}^T não possui nenhum 0. Analogamente para C_2 e C_1 .

Sob a interpretação literal da definição de complementaridade, existe um contra-exemplo a um dos argumentos da prova de suficiência da caracterização no Teorema 3. O contra-exemplo é descrito a seguir.

Sejam C_1 e C_2 dois grafos dois-clique arco-circulares com a mesma partição de

cliques $U \cup V$, e D_1 e D_2 os grafos resultantes de remover as arestas entre pares de vértices pertencentes a U e V em C_1 e C_2 respectivamente.

E sejam, também, as matrizes de biadjacência de D_1 e D_2 , denotadas $A(D_1)$ e $A(D_2)$, as seguintes:

$$A(D_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A(D_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tem-se que $A(D_1)$ e $A(D_2)$ obedecem a propriedade generalizada dos 1's circulares, e são tais que, respectivamente, a matriz M e \bar{M}^T são fundamentais a eles, com M sendo a matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Desse modo, as matrizes de adjacência de C_1 e C_2 fundamentais a M e \bar{M}^T respectivamente são

$$A(C_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A(C_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Note, através das matrizes, que $A(C_1)$ e $A(C_2)$ obedecem a propriedade dos 1's quasi-circulares e C_1 e C_2 são suplementares sob a “interpretação original” da definição.

O argumento da prova do Teorema 3 para o qual essas matrizes são um contra exemplo é o de que, se C_1 e C_2 são suplementares, e as matrizes $A(D_1) = (x_{ij})$ e $A(D_2)^T = (y_{ij})$ são tais que M é fundamental a $A(D_1)$ e \overline{M}^T é fundamental a $A(D_2)$, então a matriz $A = (x_{ij}y_{ij})$ obedece a propriedade generalizada dos 1's circulares com relação à mesma partição em escada que é fundamental para $A(D_1)$, a partição (L, U) em questão sendo a seguinte.

$$\begin{pmatrix} L & U & U & U \\ L & U & U & U \\ L & L & U & U \\ L & L & L & U \\ L & L & L & L \end{pmatrix}$$

A prova dada para essa afirmação em (BASU et al., 2013) é essencialmente a mesma que a apresentada neste texto, e ela é consistente sob a nossa interpretação no item 2 da definição de complementaridade. A prova, porém, não é suficiente se a interpretação literal de complementaridade for considerada a correta, pois a matriz A dados os dois grafos D_1 e D_2 anteriormente descritos é a seguinte.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A matriz A claramente não obedece a propriedade generalizada dos 1's circulares para (L, U) .

Logo, tem-se que o texto original sofre no mínimo de um problema grave de ambiguidade.

3 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentamos resultados de nossa autoria descobertos ao longo dos estudos.

3.1 ESTUDO DA CLASSE, PROPRIEDADES E CARACTERIZAÇÃO

Primeiramente, o seguinte lema é necessário para a simplificação de uma série de provas posteriores.

Lema 4. *Todo grafo bi-arco-circular admite um modelo bi-arco-circular onde não há arcos com extremos coincidentes.*

Demonstração. Começemos com um modelo $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ qualquer que corresponde ao grafo G , passamos o modelo pelo seguinte processo: enquanto houverem arcos $A_1, A_2 \in \mathbb{I} \cup \mathbb{E}$ que tenham extremos coincidentes, ajustaremos os extremos de A_1 de acordo com a seguinte lista de casos (lembrando que o valor de ϵ precisa ser recalculado após cada deslocamento).

1. Caso $s(A_1) = s(A_2)$, deslocamos $s(A_1)$ em ϵ no sentido horário.
2. Caso $t(A_1) = t(A_2)$, deslocamos $t(A_1)$ em ϵ no sentido anti-horário.
3. Caso $s(A_1) = t(A_2)$, deslocamos $s(A_1)$ em ϵ no sentido horário.

É fácil verificar que qualquer coincidência de extremos cairá em um desses três casos, e que os deslocamentos em ϵ descritos não modificam o conjunto de arcos que A_1 intersecta, considerando todos os arcos abertos. Também é fácil verificar que o processo necessariamente termina, pois cada deslocamento feito diminui o número de extremos coincidentes no modelo em pelo menos 1.

Ao final do processo, o modelo $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ continuará correspondendo a G , e não terá extremos coincidentes. \square

A caracterização combinatorial a seguir é consequência do Lema 4.

Teorema 5. *Seja $G = (U \cup V, E)$ um grafo bipartido, $U \cup V = \{w_1, \dots, w_n\}$. Para cada i , criamos s_i e t_i para representar, em uma sequência discreta, as potenciais posições dos extremos de um arco que correspondesse a w_i em um modelo bi-arco-circular. O grafo G é*

bi-arco-circular se e somente se existe uma permutação R de $P = \{s_1, \dots, s_n\} \cup \{t_1, \dots, t_n\}$ tal que $w_i \in U$ e $w_j \in V$ são vizinhos se e somente se alguma permutação cíclica de R é tal que uma das seguintes situações ocorre

- s_i ou t_i possuem, na permutação R , índice maior que s_j e menor que t_j , **ou**
- s_j ou t_j possuem, na permutação R , índice maior que s_i e menor que t_i .

Demonstração. (\Leftarrow) A construção de um modelo bi-arco-circular tendo-se uma permutação R é trivial. Basta dispor, para cada w_i ($1 \leq i \leq n$), um arco $A_i = (f(s_i), f(t_i))$ sobre o círculo C de comprimento $2n + 1$ (onde $f(a)$ é o índice do elemento $a \in P$ na permutação R), e adicionar A_i a \mathbb{I} se $w_i \in U$, e a \mathbb{E} caso contrário. É fácil verificar que o modelo bi-arco-circular $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ assim construído tem G como seu grafo correspondente.

(\Rightarrow) Seja $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ um modelo bi-arco-circular de G sem extremos coincidentes em $\mathbb{I} \cup \mathbb{E}$. Representamos, por $s(i)$ e $t(i)$, os extremos anti-horário e horário do arco correspondente a w_i no modelo, respectivamente. Seja R a permutação do conjunto P tal que, para $0 < i, j, k \leq n$, o índice de s_i na permutação é k se e somente se $s(i)$ é o k -ésimo extremo de arco encontrado ao se percorrer o círculo no sentido horário partindo do ponto inicial, e o mesmo valendo para t_j , só que com o extremo $t(j)$. É fácil verificar que essa permutação satisfaz as propriedades no enunciado. \square

O seguinte lema simplifica a prova de algumas outras afirmações.

Lema 6. *Seja $G = (U \cup V, E)$ um grafo bipartido. Se existe uma permutação R de U tal que para todo $v \in V$, $N(v)$ é circularmente consecutiva na permutação R , então G é bi-arco-circular.*

Demonstração. Seja $R = (u_0, \dots, u_{n-1})$ a permutação com as propriedades descritas no enunciado. Sendo C um círculo de comprimento n , definimos o conjunto \mathbb{I} de arcos correspondentes a U do seguinte modo: o arco correspondente a u_i começa à distância i no sentido horário do ponto inicial do círculo, e termina a uma distância $i + 1$ (módulo n). Assim, a construção do conjunto \mathbb{E} torna-se trivial: se $N(v) = \{u_i, \dots, u_{i+k}\}$ (onde as somas são módulo n), então o arco que corresponde a v começa à distância $i + 1/2$ da origem, e estende-se até $((i + k + 1) \bmod n) - 1/2$ (onde, novamente, todas as somas são módulo n). É fácil verificar que o arco correspondente a v intersecta todos e apenas os arcos de \mathbb{I} correspondentes a $N(v)$. Logo, $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é um modelo de G (e se houverem

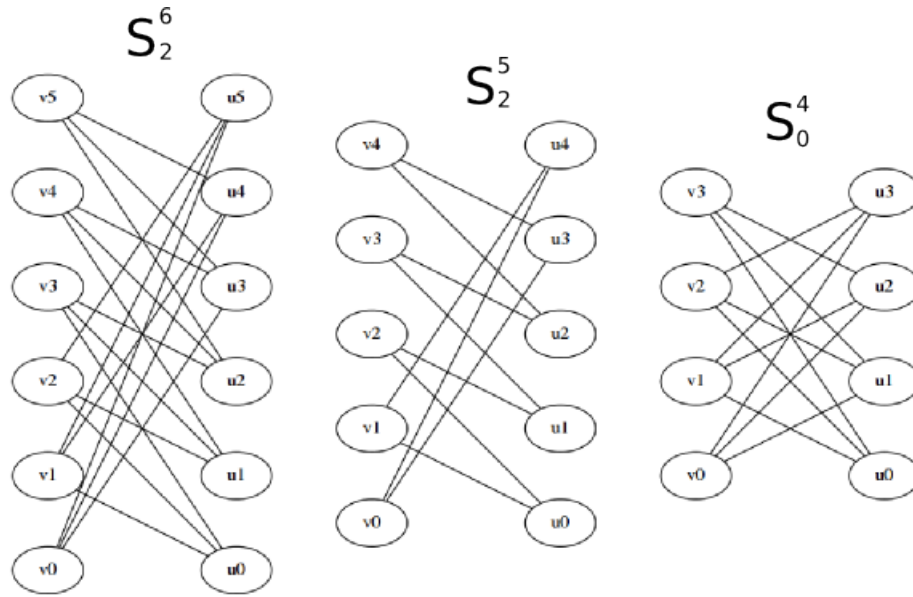


Figura 5 – Os grafos coroa generalizados S_2^6 , S_2^5 e S_0^4

elementos de V com vizinhanças iguais, alguns deslocamentos em ϵ podem tornar todos os arcos diferentes sem sacrificar as interseções, como descrito no Lema 4). \square

A seguinte definição generalizada de *grafos coroa*, análoga à definição de **conjuntos parcialmente ordenados coroa** contida no trabalho de (TROTTER JR.; MOORE JR., 1976), introduz uma subfamília grande de grafos bipartidos que o Lema 6 mostra serem bi-arco-circulares. Na Figura 5 são mostrados alguns exemplos de grafos coroa generalizados.

Definição 5. *Sejam n, k números naturais, um grafo coroa generalizado S_k^n é um grafo bipartido $(U \cup V, E)$, com $U = \{u_1, \dots, u_{n+k}\}$ e $V = \{v_1, \dots, v_{n+k}\}$ tal que $N(v_i) = U - \{u_i, \dots, u_{i+k}\}$ (onde esta última soma é módulo n).*

Outra consequência imediata do Lema 6 é que os grafos *bipartidos de permutação*, definidos a seguir, são bi-arco-circulares.

Definição 6. (Brandstädt; Kratsch, 1985) *Seja $P = (p_1, \dots, p_n)$ uma permutação dos naturais $\{1, 2, \dots, n\}$, o grafo de permutação G correspondente à permutação P é um grafo tal que $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $E(G) = \{\{v_i, v_j\} | i < j \wedge p_i > p_j\}$.*

Um grafo *bipartido de permutação*, então, é simplesmente um grafo de permutação bipartido.

Lema 7. *Grafos bipartidos de permutação são bi-arco-circulares.*

Demonstração. Seja G um grafo de permutação bipartido correspondente à permutação $P = (p_1, \dots, p_n)$ de $\{1, \dots, n\}$, com $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ bipartido em conjuntos U e V . É fácil verificar, para $i < j$, que se $v_i, v_j \in U$, então $p_i < p_j$, pois v_i e v_j não podem ser vizinhos.

Agora, suponha que $v_a \in V$ é vizinho de $v_b, v_c \in U$, com $b < c$, e seja $v_d \in U$ tal que $b < d < c$. Vamos provar que v_a é vizinho de v_d , assim provando que a vizinhança de v_a é consecutiva com relação à ordenação por índices dos elementos de U . Como v_a é vizinho de v_b e v_c , teremos, necessariamente, uma de duas possibilidades:

- $a > c$ e $p_a < p_b$, ou
- $a < b$ e $p_a > p_c$.

A possibilidade de $b < a < c$ é descartada pois, neste caso, teríamos $p_c < p_a < p_b$, o que levaria v_b e v_c a serem vizinhos.

As duas possibilidades são análogas, então assumiremos, sem perda de generalidade, que $a > c$ e $p_a < p_b$. Note que $p_a < p_b < p_d < p_c$, e como $a > c > d > b$, v_a é vizinho de v_d . Logo, todas as vizinhanças de V são consecutivas com relação à ordenação por índices dos elementos de U . Pelo Lema 6, G é bi-arco-circular. \square

O conjunto de grafos bipartidos que definimos a seguir, chamados de *grafos excluídos*, é composto inteiramente de grafos não bi-arco-circulares. Alguns exemplos de grafos excluídos são mostrados na Figura 6.

Definição 7. *Sejam $n > 3$ e $0 < k < n - 2$. Um grafo excluído X_k^n é um grafo bipartido em conjuntos $U \cup V$, com $U = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$ e $V = \{v_0, \dots, v_n\}$, tal que $N(v_i) = \{u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+k}\}$ para todo $0 \leq i < n$, e $N(v_n) = \{u_0, u_2, \dots, u_{k+1}\}$ (novamente, as somas são módulo n). Note que a vizinhança de v_n é a única que não é circularmente consecutiva com relação à permutação (u_0, \dots, u_{n-1}) , já que existe um “salto” de u_0 para u_2 .*

Para provar que os grafos excluídos não são bi-arco-circulares, é necessário o seguinte lema. Dizemos que um arco A intersecta *minimalmente* um arco $B \in \mathbb{X}$ se não existe $B' \in \mathbb{X}$, $B' \subsetneq B$ tal que A intersecta B' .

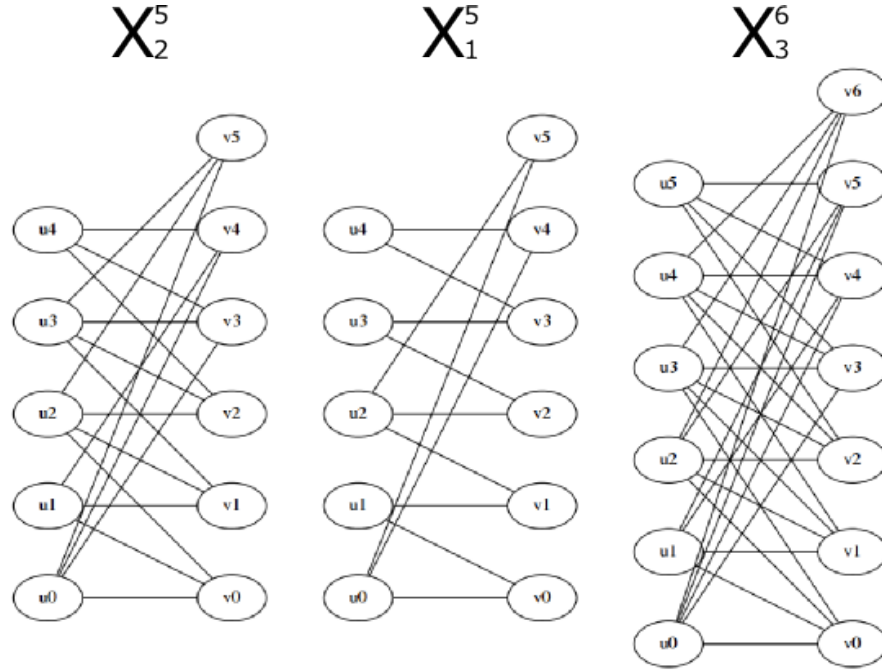


Figura 6 – Os grafos excluídos X_2^5 , X_1^5 e X_3^6

Lema 8. Para todo conjunto \mathbb{X} de arcos sobre um círculo, com $|\mathbb{X}| = n \geq 4$, e todo número natural $0 < x < n$, existem no máximo n subconjuntos $\mathbb{X}' \subset \mathbb{X}$ de x arcos tais que é possível traçar um arco que intersecte todos os elementos de \mathbb{X}' sem intersectar nenhum elemento de $\mathbb{X} - \mathbb{X}'$.

Demonstração. Seja $\mathbb{X} = \{X_0, \dots, X_{n-1}\}$ um conjunto de n arcos sobre um mesmo círculo. Seja $0 \leq k \leq n-1$. Se for possível traçar um arco A que intersecta exatamente x arcos de \mathbb{X} de modo que X_k seja o primeiro arco intersectado minimalmente por A (onde a ordem que define o “primeiro arco” é definida de acordo com a ordem na qual os extremos anti-horários dos arcos são encontrados quando o círculo é percorrido no sentido horário a partir de um ponto a ϵ do extremo horário de A), o conjunto que A intersecta será necessariamente composto de todos os arcos de \mathbb{X} nos quais X_k está contido, incluindo o próprio X_k , somando um número $l > 0$ de arcos, e em seguida, os $x - l$ arcos consecutivos que ocorrem após X_k por ordem horária de aparição dos seus extremos anti-horários.

Ou seja, para todo X_k , $0 \leq k \leq n-1$, existe no máximo esse único conjunto \mathbb{X}' de x arcos tal que é possível traçar um arco A que intersecte exclusivamente os arcos de \mathbb{X}' com X_k sendo o primeiro arco intersectado minimalmente por A na ordem horária (e pode não haver nenhum, caso, por exemplo, hajam mais de x arcos que contém X_k , ou os arcos logo após X_k sejam mais que x arcos contidos uns nos outros). Como todo conjunto de x arcos que pode ser intersectado exclusivamente é tal que qualquer arco que o intersecte

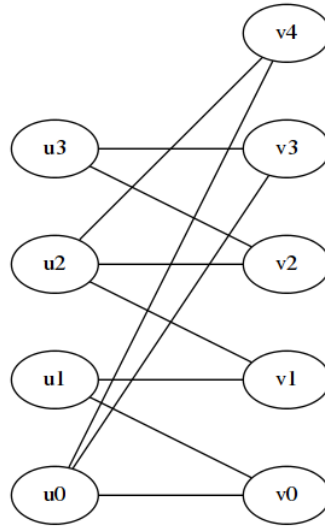


Figura 7 – O grafo excluído X_1^4

terá um primeiro elemento intersectado minimalmente (trivial, pois x é finito), existem no máximo n conjuntos de x elementos que podem ser intersectados por um novo arco sem intersectar mais nenhum arco de \mathbb{X} . \square

Corolário 9. *Para quaisquer $n > 3$ e $0 < k < n - 2$, o grafo X_k^n não é bi-arco-circular.*

Demonstração. Como as vizinhanças de V em X_k^n são $n + 1$ subconjuntos distintos de k vértices sobre um conjunto de tamanho n , se houvesse um modelo bi-arco-circular cujo grafo resultante é X_k^n , seria possível construir um conjunto \mathbb{I} de n arcos sobre um círculo tal que é possível intersectar $n + 1$ subconjuntos distintos de mesmo tamanho em \mathbb{I} sem intersectar os outros arcos (onde \mathbb{I} representaria o conjunto U de X_k^n). De acordo com o Lema 8, porém, isso é impossível. \square

Sabe-se, a princípio, que X_1^4 é minimalmente não bi-arco-circular, e que ele não é o único grafo com esta propriedade dentre os elementos da família. O grafo X_1^4 é mostrado na Figura 7.

Lema 10. *O grafo X_1^4 é minimalmente não-bi-arco-circular.*

Demonstração. Basta provar que todo subgrafo induzido de X_1^4 é bi-arco-circular. Para os subgrafos bipartidos $U' \cup V'$ onde $|U'| \leq 3$ ou $|V'| \leq 3$ isso é trivial, bastando representar o conjunto de 3 vértices por uma família de 3 arcos não-intersectantes. É fácil verificar que qualquer subconjunto de tal família poderia ser intersectado exclusivamente por algum arco para se construir a família oposta. Seja, então, X^- um subgrafo de X_1^4 obtido ao

remover-se exatamente um vértice de V , e seja $U \cup V^-$ sua bipartição. X^- será então um grafo com um conjunto independente U com $|U| = 4$ e um conjunto independente V^- com $|V^-| = 4$ e cada elemento de V^- é vizinho de um par diferente de U .

Fazendo-se $U = \{a, b, c, d\}$, suponha então que existe um vértice de U que é vizinho de três vértices de V^- , então, sem perda de generalidade, suponha que as vizinhanças de V^- são $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$. Seja então C um círculo de comprimento 5, com $\mathbb{I} = \{A = (1, 2), B = (2, 3), C = (3, 4), D = (5/4, 6/4)\}$ sendo a família de arcos que representa U , e

$\mathbb{E} = \{(7/4, 9/4), (4, 1), (1, 6/4), (3, 13/4)\}$ a família de arcos que representa V^- . Temos que $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é um modelo bi-arco-circular para X^- .

Agora suponha que não existe um vértice de U que é vizinho de três vértices de V^- . Suponha, então, sem perda de generalidade, que as vizinhanças de V^- são $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}\}$. Neste caso, seja C um círculo de comprimento 4, com $\mathbb{I} = \{A = (1, 2), B = (2, 3), C = (0, 1), D = (3, 0)\}$ e $\mathbb{E} = \{(3/2, 5/2), (1/2, 3/2), (5/2, 7/2), (7/2, 1/2)\}$, então $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é um modelo bi-arco-circular de X^- . \square

Corolário 11. *A propriedade bi-arco-circular não é preservada por remoção de arestas nem por acréscimo de arestas.*

Demonstração. O grafo $K_{5,4}$ é bi-arco circular, mas ao se remover arestas é possível obter um grafo isomorfo a X_1^4 .

O grafo vazio de 9 vértices também é bi-arco-circular, mas através da adição de arestas é possível, novamente, obter um grafo isomorfo ao X_1^4 , e portanto, a propriedade não é preservada por acréscimo de arestas. \square

O fato de que X_1^4 não é o único grafo proibido contido nos elementos da família de grafos excluídos parte do fato de que X_2^5 não contém X_1^4 induzido.

Lema 12. *O grafo X_2^5 não contém X_1^4 induzido.*

Demonstração. Seja X_2^5 bipartido em U e V como na Definição 7, e X_1^4 bipartido em U^- e V^- , analogamente, com $|U^-| = 4$ e $|V^-| = 5$. É óbvio que não é possível encontrar X_1^4 induzido com o conjunto U^- de vértices do X_1^4 sendo representado por um subconjunto de V , pois, se este fosse o caso, o conjunto U todo representaria o conjunto V^- , o que implicaria na existência de $V' \subset V$, com $|V'| = 4$, tal que $\sum_{u \in U} |N(u) \cap V'| = 10$, o que é

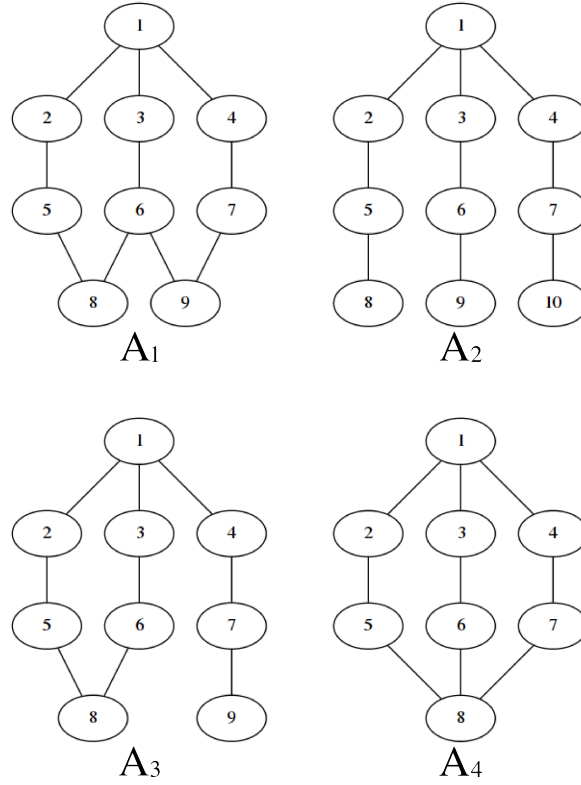


Figura 8 – Os grafos A_1 , A_2 , A_3 e A_4

impossível, já que para qualquer elemento de V , existem três elementos de U que são seus vizinhos, o que implica que o número de arestas entre U e V' é 12, mas X_1^4 só possui 10.

Suponha que seja possível encontrar X_1^4 induzido com U^- sendo subconjunto de U . Nesse caso, existiria $U' \subset U$, com $|U'| = 4$, para o qual existe $V' \subset V$, com $|V'| = 5$ tal que para todo $v \in V'$, tem-se $|N(v) \cap U'| = 2$. Seja $u' \in U - U'$. Note que todos os vértices de V' são vizinhos de u' , pois todos os elementos de V tem exatamente três vizinhos em U , portanto, todos os vértices de V que possuem apenas dois vizinhos em U' serão vizinhos de u' , que é o único elemento de U que não está em U' . Porém, existem no máximo 4 vértices de V que são vizinhos de u' , pois, segundo a definição de X_2^5 , existe $0 \leq i \leq 4$ tal que $u' = u_i$. Sendo assim, pela definição das vizinhanças dos elementos de V , $N(u') = \{v_i, v_{i-1}, v_{i-2}\}$ se v_5 não é vizinho de u' , e $N(u') = \{v_i, v_{i-1}, v_{i-2}, v_5\}$ caso contrário (onde a subtração é cíclica, com $0 - 1 = 4$), levando a uma contradição. \square

Uma investigação posterior, focada em grafos bi-arco-circulares próprios, levou-nos à descoberta dos quatro grafos não bi-arco-circulares A_1, A_2, A_3 e A_4 , apresentados na Figura 8. Eles foram obtidos ao se adicionar, ao grafo não- próprio “forquilha” descrito na Subseção 3.4.1, todos os conjuntos não isomorfos de vértices cujas uniões de vizinhanças

cobrem minimalmente todos os vértices $\{5, 6, 7\}$ sem tocar o $\{1\}$.

Lema 13. *Os grafos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 não são bi-arco-circulares.*

Demonstração.   fácil verificar que A_1 é isomorfo a X_1^4 . Resta, então, verificar os outros grafos.

Suponha que os grafos são arco-circulares, então, os modelos bi-arco-circulares deles contém um modelo do subgrafo induzido por $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Nesse “sub-modelo”, porém, o arco correspondente a pelo menos um dos elementos de $\{5, 6, 7\}$ estará contido no arco correspondente a 1 (BASU et al., 2013).

Para cada vértice i , chamamos o seu arco correspondente de B_i . Se o arco em questão for o arco B_5 , isso torna impossível a existência de um arco B_8 em todos os quatro grafos, pois qualquer arco que intersecte B_5 vai ter que intersectar B_1 , e 8 não é vizinho de 1 em nenhum dos grafos. Se for o arco B_6 , isso torna impossível a existência de um arco B_8 em A_3 e A_4 , e B_9 em A_2 , por motivos análogos. Finalmente, se o arco em questão for o arco B_7 , isso torna impossível a existência de um arco B_{10} em A_2 , B_9 em A_3 e B_8 em A_4 , também por motivos análogos aos anteriores. \square

O lema a seguir permite que desconsideremos os grafos proibidos X_k^n para uma possível caracterização da classe.

Lema 14. *Para todos n, k , com $n > 3$ e $0 < k < n - 2$, o grafo X_k^n possui A_1 , A_2 , A_3 ou A_4 induzido.*

Demonstração.   fácil verificar que X_1^4 é isomorfo a A_1 . Então, podemos começar considerando $n > 4$ já que X_1^4   o único grafo excluído para $n = 4$. A prova a seguir é separada em casos que cobrem todo o conjunto dos grafos X_k^n .

Caso $n > 4$ e $k = 1$: Neste caso, considere o subgrafo de X_k^n induzido pelos vértices

$V' = \{u_0, u_1, u_2, u_{n-1}, v_0, v_1, v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\}$. Temos:

- $N(v_0) = \{u_0, u_1\}$,
- $N(v_1) = \{u_1, u_2\}$,
- $N(v_{n-2}) = \{u_{n-2}, u_{n-1}\}$,
- $N(v_{n-1}) = \{u_{n-1}, u_0\}$,
- $N(v_n) = \{u_0, u_2\}$.

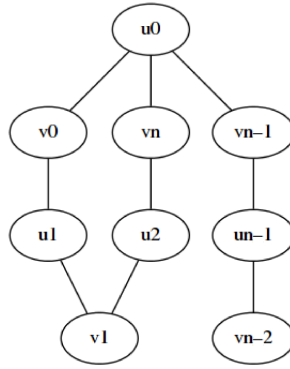


Figura 9 – O A_3 induzido em X_1^n para $n > 4$

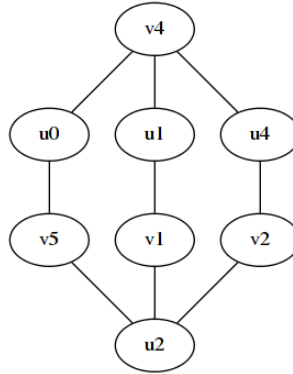


Figura 10 – O A_4 induzido em X_2^5

Como $n \geq 5$, todos os vértices do conjunto serão distintos. Desta forma, temos o subgrafo induzido da Figura 9, isomorfo a A_3 .

Caso $n = 5$ e $k = 2$: Considere o subgrafo induzido por $V' = \{u_0, u_1, u_2, u_4, v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Construindo as vizinhanças de acordo com a definição de X_2^5 , temos:

- $N(v_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$,
- $N(v_2) = \{u_2, u_3, u_4\}$,
- $N(v_4) = \{u_4, u_0, u_1\}$,
- $N(v_5) = \{u_0, u_2, u_3\}$.

Gerando um subgrafo induzido isomorfo a A_4 , mostrado na Figura 10.

Como X_1^5 e X_2^5 são os únicos grafos excluídos com $n = 5$, podemos considerar, deste ponto em diante, $n > 5$.

Caso $n > 5$ e $k = 2$: Considere $V' = \{u_0, u_1, u_2, u_{n-1}, v_1, v_{n-3}, v_{n-1}, v_n\}$. As vizinhanças serão:

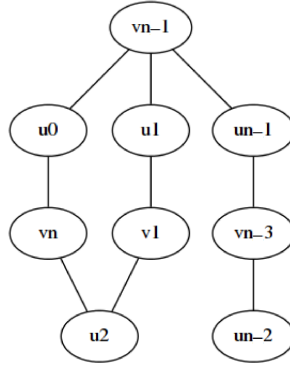


Figura 11 – O A_3 induzido em X_2^n para $n > 5$

- $N(v_1) = \{u_1, u_2, u_3\}$,
- $N(v_{n-3}) = \{u_{n-3}, u_{n-2}, u_{n-1}\}$,
- $N(v_{n-1}) = \{u_{n-1}, u_0, u_1\}$,
- $N(v_n) = \{u_0, u_2, u_3\}$.

Como $n > 5$, todos os vértices serão distintos, resultando no subgrafo induzido da Figura 11, isomorfo também a A_3 .

Caso $n > 5$ e $k = n - 3$: Consideremos o conjunto $V' = \{u_0, u_1, u_{n-2}, u_{n-1}, v_1, v_2, v_{n-1}, v_n\}$.

Seguindo as regras de construção dos grafos excluídos, e com $U = \{u_0, \dots, u_{n-1}\}$, temos:

- $N(v_1) = U - \{u_0, u_{n-1}\}$,
- $N(v_2) = U - \{u_0, u_1\}$,
- $N(v_{n-1}) = U - \{u_{n-2}, u_{n-3}\}$,
- $N(v_n) = U - \{u_1, u_{n-1}\}$.

Novamente, todos os vértices serão distintos, levando ao grafo da Figura 12, isomorfo a A_4 .

Caso $n > 5$ e $2 < k < n - 3$: Enfim, o último caso. Dessa vez, considere

$V' = \{u_0, u_1, u_k, u_{n-2}, u_{n-1}, v_1, v_{n-k-1}, v_{n-1}, v_n\}$. As vizinhanças serão:

- $N(v_1) = \{u_1, \dots, u_{k+1}\}$,
- $N(v_{n-k-1}) = \{u_{n-k-1}, \dots, u_{n-1}\}$,

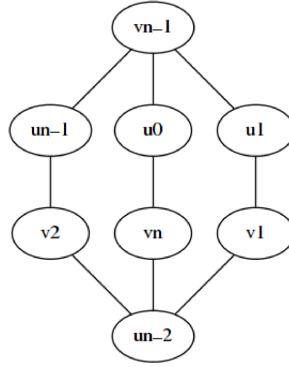


Figura 12 – O A_4 induzido em X_{n-3}^n para $n > 5$

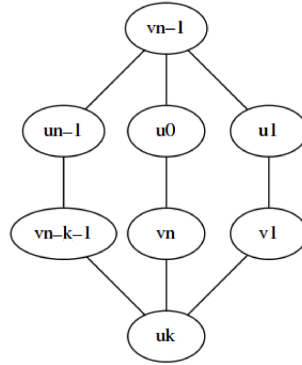


Figura 13 – O A_4 induzido em X_k^n para $n > 5$ e $n - k - 1 \leq k < n - 3$

- $N(v_{n-1}) = \{u_{n-1}, u_0, \dots, u_{k-1}\},$
- $N(v_n) = \{u_0, u_2, \dots, u_{k+1}\}.$

Como $n > 5$ e $n - 3 > k \geq 3$, é fácil verificar que todos os vértices de V' serão distintos. Em particular, note que $u_k \in N(v_n) \cap N(v_1)$, e que $u_{n-2} \in N(v_{n-k-1})$, e $u_{n-2} \notin N(v_{n-1}) \cup N(v_n) \cup N(v_1)$. Desse modo, sobram duas possibilidades: ou $n - k - 1 \leq k$, ou $n - k - 1 > k$. No primeiro caso, $u_k \in N(v_{n-k-1})$ e um A_4 é induzido como na Figura 13.

No segundo caso, $u_k \notin N(v_{n-k-1})$ e um A_3 é induzido como na Figura 14.

□

Ainda com relação a estes quatro grafos, propomos uma conjectura a respeito da completude do conjunto $\{A_1, \dots, A_4\}$, juntamente com qualquer grafo não bi-intervalo acrescido de uma aresta isolada, para caracterizar grafos bi-arco-circulares através de estruturas proibidas. A conjectura em questão depende da definição de *grafos bi-intervalo*.

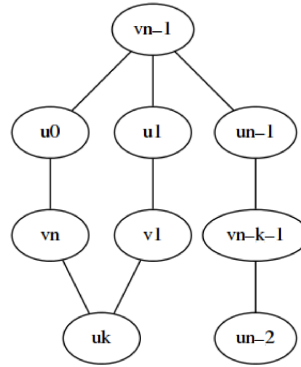


Figura 14 – O A_3 induzido em X_k^n para $n > 5$ e $2 < k < n - k - 1 \leq n - 3$

Definição 8. ([HELL; HUANG, 2004](#)) Um grafo bipartido $G = (X \cup Y, E)$ é *bi-intervalo* se e somente se é possível atribuir a cada vértice um intervalo sobre a reta real tal que, para todo $x \in X$, e $y \in Y$, existe $\{x, y\} \in E$ se e somente se os intervalos correspondentes a x e y se intersectam.

Para se assemelhar mais ao tipo de notação que usamos neste trabalho, podemos criar um *modelo bi-intervalo* ao dividir os intervalos em dois conjuntos (\mathbb{A}, \mathbb{B}) , com \mathbb{A} contendo intervalos correspondentes a X e \mathbb{B} contendo intervalos correspondentes a Y .

Como não conter $\{A_1, \dots, A_4\}$ é condição necessária para um grafo ser bi-arco-circular, a conjectura a seguir foi elaborada tendo-os em mente. Além destes quatro grafos, existe uma infinidade de grafos que não são bi-intervalo. Esses, quando acrescidos de uma aresta isolada (i.e., uma componente conexa separada contendo uma aresta), são não bi-arco-circulares: se for possível construir um modelo bi-arco-circular de um grafo não bi-intervalo, os arcos do modelo em questão são tais que todos os pontos do círculo estão contidos em algum arco. Se acrescentarmos, então, uma componente conexa contendo uma aresta, fica impossível adicionar arcos correspondentes aos vértices desta aresta, pois independente de onde pusermos esses arcos, pelo menos um dos dois intersectará um arco da componente não bi-intervalo do conjunto oposto, fazendo com que o modelo não represente o grafo que se pretende representar.

Conjectura 15. Um grafo bipartido é bi-arco-circular se e somente se não contém, como subgrafo induzido, nenhum dos grafos A_1 , A_2 , A_3 e A_4 , nem um grafo composto pela união de um grafo não bi-intervalo e uma aresta isolada.

Nossa crença na Conjectura 15 é baseada em experimentos informais, nos quais construímos grafos bipartidos adicionando vértices a um grafo inicial simples até que se

tornasse impossível construir um modelo bi-arco-circular. Em todas as nossas tentativas, o grafo resultante acabava por conter os subgrafos induzidos descritos no enunciado da conjectura.

O Algoritmo 1 verifica, em tempo polinomial, se um grafo bipartido se encaixa no enunciado da Conjectura 15.

Algoritmo 1: Verificar(G)
Se G contém A_i induzido, $1 \leq i \leq 4$
Devolva <i>Não</i>
Para $\{v, w\} \in E(G)$
$G' \leftarrow G - \{x \in V(G) \mid \{x, v\} \in E(G) \vee \{x, w\} \in E(G)\}$
Se G' não é bi-intervalo
Devolva <i>Não</i>
Devolva <i>Sim</i>

É fácil verificar que se ocorrer, no grafo G , um subgrafo induzido contendo um grafo não bi-intervalo juntamente com uma aresta isolada, o laço “Para” no algoritmo levará a um retorno “Não”, e a recíproca também é verdadeira. Se, em alguma iteração, o grafo G' não for bi-intervalo, temos que $(V(G') \cup \{v, w\}, E(G') \cup \{\{v, w\}\})$ é o subgrafo induzido que procuramos, e reciprocamente, se algum subgrafo induzido $H \subset G$ é composto de um grafo não bi-intervalo em união com uma aresta isolada e , no momento em que e for avaliada por uma iteração do “Para”, o grafo resultante da remoção dos vértices de e juntamente com seus vizinhos será não bi-intervalo, e H será subgrafo induzido de $G' + e$.

Como o problema de reconhecimento de grafos bi-intervalo tem complexidade polinomial (MÜLLER, 1997), temos que o algoritmo *Verificar* é polinomial, o que implica que, se a Conjectura 15 é verdadeira, a complexidade de reconhecimento da classe bi-arco-circular é polinomial.

A complexidade do algoritmo de Müller para um grafo $G = (V, E)$ é $O(|V||E|^6(|V|+|E|) \log |V|)$, possuindo expoentes constantes, porém altos, e provavelmente não sendo ótima. Mesmo assim, utilizando o algoritmo em questão para reconhecer grafos bi-intervalo no nosso algoritmo, podemos calcular uma cota superior para sua complexidade.

Consideremos $n = |V(G)|$ e $m = |E(G)|$. Um algoritmo de “força bruta” para determinar se G possui um subgrafo induzido H envolve buscar por todos os subconjuntos S de $|V(H)|$ elementos em $V(G)$, e verificar, entre todas as possíveis bijeções de S para $V(H)$, se existe uma tal que, para cada par de vértices de S , a adjacência entre eles é a mesma que entre os vértices correspondentes em $V(H)$. A complexidade disso, para H

fixo, é $O(n^{|V(H)|})$. No nosso caso, verificamos a existência de quatro subgrafos induzidos separados, o maior dos quais possui dez vértices, portanto, o primeiro “Se” do algoritmo tem complexidade $O(|V(G)|^{10})$. O “Para” do algoritmo executará m iterações, onde o primeiro comando dentro do laço varrerá, na pior das hipóteses, $|V(G)|$ vértices, e o segundo comando (o “Se” de dentro do laço) tem a complexidade do algoritmo de Müller sobre o grafo G , pois cada grafo G' terá no máximo n vértices e m arestas.

Desse modo, tem-se que o algoritmo tem complexidade

$$\begin{aligned} O(n^{10} + m(nm^6(n+m) \log n)) = \\ O(n^{10} + nm^7(n+m) \log n). \end{aligned}$$

A complexidade é polinomial, mostrando que, se a conjectura for verdadeira, a classe é polinomialmente reconhecível. Porém, é provável que, devido aos altos expoentes, o algoritmo de reconhecimento proposto não seja ótimo.

3.2 RELAÇÃO COM OUTRAS CLASSES

3.2.1 Grafos Arco-Circulares Bipartidos

Grafos arco-circulares bipartidos são grafos bipartidos que admitem um modelo arco-circular. A questão da relação entre essa subclasse dos grafos arco-circulares e a classe dos grafos bi-arco-circulares é uma pergunta simples, porém de relevância para estabelecer hierarquias de classes de grafos.

A respeito da relação entre grafos bi-arco-circulares e grafos arco-circulares, um lema relevante, ainda que simples, é descrito a seguir.

Lema 16. *Seja G um grafo bipartido. Se G admite um modelo arco-circular, então G admite um modelo bi-arco-circular.*

Demonstração. Seja $\mathbb{M} = (C, \mathbb{A})$ um modelo arco-circular que representa G . Como G é bipartido, existem então dois conjuntos independentes V, W , com $V \cup W = V(G)$. Sejam $\mathbb{V} \subset \mathbb{A}$ a família de arcos que representam os vértices de V no modelo \mathbb{M} e $\mathbb{W} \subset \mathbb{A}$ a família de arcos que representam os vértices de W . Considere o modelo bi-arco-circular $\mathbb{B} = (C, \mathbb{V}, \mathbb{W})$. Vamos provar que, para quaisquer dois arcos $A_1, A_2 \in \mathbb{A}$, os vértices correspondentes a A_1 e A_2 são vizinhos em G se e somente se eles são vizinhos em $G(\mathbb{B})$.

Primeiro, suponha que os arcos A_1 e A_2 correspondem a vértices que não são vizinhos em G . Neste caso, eles não possuem interseção entre si, e isso implica que os vértices correspondentes a eles não são vizinhos em $G(\mathbb{B})$.

Agora, suponha que os arcos A_1 e A_2 correspondem a vértices que são vizinhos em G . Neste caso, como o grafo é bipartido, os vértices correspondentes pertencem a conjuntos independentes diferentes. Então, sem perda de generalidade, suponha que o vértice correspondente a A_1 pertence a V e o correspondente a A_2 pertence a W . Temos, assim, que $A_1 \in \mathbb{V}$ e $A_2 \in \mathbb{W}$ e, não só isso, mas A_1 e A_2 tem interseção entre si (caso contrário, seus vértices correspondentes não seriam vizinhos em G). Assim, tem-se que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$ e A_1 e A_2 não pertencem ambos a \mathbb{V} nem ambos a \mathbb{W} , satisfazendo, assim, os requisitos para que seus vértices correspondentes em $G(\mathbb{B})$ sejam vizinhos. \square

Além disso, os grafos bipartidos arco-circulares estão propriamente contidos nos grafos bi-arco-circulares, como consequência dos seguintes lemas.

Lema 17. (*BONOMO et al., 2009*) *O grafo obtido ao se adicionar um vértice isolado a C_4 não é arco-circular.*

A demonstração do lema 17, apesar de simples, é omitida para fins de brevidade.

Lema 18. *O grafo obtido ao se adicionar um vértice isolado a C_4 é bi-arco-circular.*

Demonstração. Considere o modelo $\mathbb{B} = (C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ onde C é um círculo de comprimento 8, $\mathbb{I} = \{(1, 2), (1, 3)\}$ e $\mathbb{E} = \{(1, 4), (1, 5), (6, 7)\}$.

Os vértices correspondentes a $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$ em $G(\mathbb{B})$ formam um $K_{2,2}$, que é isomorfo a um C_4 , e o vértice correspondente a $(6, 7)$ ficará isolado. \square

Assim, conclui-se o Corolário 19, apresentado a seguir.

Corolário 19. *A classe de grafos arco-circulares bipartidos é subclasse própria da classe bi-arco-circular.*

3.2.2 Grafos Bi-Intervalo

Grafos bi-intervalo, como na Definição 8, são uma classe que já foi largamente estudada, inclusive por pesquisadores como (HELL; HUANG, 2004) e outros. A definição da classe é simples e, intuitivamente, levanta-se a pergunta da relação entre esta e a classe dos grafos bi-arco-circulares.

Uma série de caracterizações de grafos bi-intervalo, usando diferentes abordagens, foi apresentada por (HELL; HUANG, 2004). Além disso, um algoritmo de reconhecimento em tempo polinomial foi apresentado por (MÜLLER, 1997), com complexidade $O(|V||E|^6(|V| + |E|) \log |V|)$, como já mencionado ao final da Seção 3.1.

Pela definição é fácil concluir o lema a seguir.

Lema 20. *Se $G = (U \cup V, E)$ é um grafo bi-intervalo, então G é bi-arco-circular.*

Demonstração. Começamos com um par de famílias de intervalos (\mathbb{A}, \mathbb{B}) , onde \mathbb{A} contém intervalos correspondentes aos vértices do conjunto U e \mathbb{B} contém intervalos que correspondentes aos vértices do conjunto V de modo que, para todo $u \in U$ e $v \in V$, u e v são vizinhos em G se e somente se seus arcos correspondentes intersectam. Suponha, também, que nenhum desses intervalos possui um extremo menor que 0 (se isso não for verdade, é possível obter um modelo equivalente somando-se o mesmo valor positivo a todos os extremos de intervalos).

Agora, seja n o valor do maior extremo dentre os intervalos de $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, e seja C um círculo de comprimento $2n$, com um ponto p marcado como ponto inicial. Se definirmos, para cada intervalo $A \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, com $A = (a, b)$, um arco $f(A)$ sobre C cujo extremo anti-horário está a a de distância no sentido horário de p , e o extremo horário está a b de distância no sentido horário de p , é fácil verificar que $(C, f(\mathbb{A}), f(\mathbb{B}))$ é um modelo bi-arco-circular que corresponde a G . \square

Além disso, sabe-se que a classe de grafos bi-intervalo é subclasse própria dos grafos bi-arco-circulares, devido ao seguinte lema.

Lema 21. *O grafo S_0^3 não é bi-intervalo.*

Demonstração. Para que o grafo coroa de seis vértices admita um modelo bi-intervalo, é necessário que exista um conjunto de intervalos $\mathbb{S} = \{X, Y, Z\}$, de modo que para qualquer par de intervalos de \mathbb{S} , seja possível traçar um intervalo que intersecte esse par sem intersectar o terceiro elemento. É fácil verificar que \mathbb{S} precisa ser próprio, pois, por exemplo, se $X \subset Y$, então não haverá um intervalo que intersecte $\{X, Z\}$ exclusivamente.

Suponha, sem perda de generalidade, que os inícios dos intervalos X, Y, Z aparecem nessa ordem, do menor para o maior. Deste modo, se um intervalo intersecta exclusivamente X e Z , então $Y \subset X$, o que é absurdo. \square

Corolário 22. *O conjunto de grafos bi-intervalo é subconjunto próprio dos grafos bi-arco-circulares.*

3.3 COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL DE RECONHECIMENTO

Um problema de importância ao se estudar qualquer classe de grafos é a dificuldade de se reconhecer um grafo da classe computacionalmente. Para a classe dos grafos bi-arco-circulares, a complexidade de reconhecimento é, no momento, um problema em aberto. Uma caracterização que simplifique a descoberta de um algoritmo de reconhecimento poderia, em tese, levar à descoberta de um algoritmo polinomial. Porém, as caracterizações já conhecidas da classe, descobertas por (BASU et al., 2013) e descritas no capítulo 4, não se prestam, em primeira inspeção, à descoberta de um algoritmo eficiente.

Um resultado imediato, e de fácil demonstração, é o de que a classe está em NP .

Teorema 23. *O problema de reconhecimento de grafos bi-arco-circular está em NP .*

Demonstração. Seja G um grafo, $\mathbb{B} = (C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ um modelo bi-arco-circular e $f : V(G) \rightarrow \mathbb{I} \cup \mathbb{E}$ uma bijeção. \mathbb{B} e f certificam que G é bi-arco-circular se para todo $v, w \in V(G)$, $\{v, w\} \in E(G)$ se e somente se $f(v)$ e $f(w)$ possuem interseção não-vazia e não pertencem ao mesmo conjunto dentre \mathbb{I} e \mathbb{E} . Pois se G e \mathbb{B} obedecem essa propriedade, então G necessariamente é um grafo bi-arco-circular, pois existe um modelo bi-arco-circular cujo grafo correspondente é isomorfo a ele.

Se G é um grafo bi-arco-circular, existe modelo bi-arco-circular de G com tamanho polinomial sobre $|G|$, pois existirão $|V(G)|$ arcos na união de seus dois conjuntos, e podem ser representados por pares de números não maiores que o comprimento do círculo do modelo, e o círculo pode ser representado por uma única variável numérica indicando o seu comprimento, e em particular, é possível construir um modelo de G com comprimento de círculo $2|V(G)|$, e onde cada extremo é representado por um natural entre 0 e $2|V(G)|$, como visto na prova do Teorema 5. Verificar se um modelo qualquer \mathbb{B} juntamente com uma bijeção f certificam um grafo G pode ser feito em tempo $O(|V(G)|^2|\mathbb{I} \times \mathbb{E}|)$, pois bastaria verificar para cada par de vértices v, w a propriedade acima. \square

3.4 SUBCLASSES DA CLASSE BI-ARCO-CIRCULAR

Nesta seção, serão apresentados estudos sobre algumas subclasses de grafos bi-arco-circulares, e o que se sabe delas tanto por pesquisa própria quanto por referências externas.

3.4.1 Duas Definições da Subclasse Própria

O conceito de grafos bi-arco-circulares próprios consiste em proibir, em um modelo bi-arco-circular, arcos contidos uns nos outros dadas certas circunstâncias. Existe, primeiramente, uma definição canônica para a subclasse de grafos bi-arco-circulares próprios, estudada por (BASU et al., 2013) e (DAS; CHAKRABORTY, 2015). A definição em questão proíbe arcos propriamente contidos dentro da mesma família.

Definição 9. *Um grafo G é bi-arco-circular próprio tipo 1 se e somente se existe um modelo $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ que representa G tal que \mathbb{I} e \mathbb{E} são conjuntos próprios de arcos.*

Iremos nos referir à classe nessa primeira definição como classe Pr_1 , para facilitar a notação. A classe assim definida conta com uma caracterização de (BASU et al., 2013) baseada em matrizes de biadjacência, e uma de (DAS; CHAKRABORTY, 2015) baseada em ordenações do conjunto de vértices. As caracterizações supracitadas não serão apresentadas neste texto, pois são dependentes de uma série de definições especiais que acabariam por alongá-lo e tirá-lo do foco.

Além desta definição canônica, apresentamos uma segunda, de nossa autoria, que proíbe arcos propriamente contidos entre os dois conjuntos opostos de arcos de um modelo. A ideia é proibir arcos contidos uns nos outros se os mesmos induzem uma aresta no grafo correspondente, com o intuito de verificar a diferença entre uma classe assim definida e a classe Pr_1 .

Definição 10. *Um grafo G é bi-arco-circular próprio tipo 2 se e somente se existe um modelo $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ que representa G tal que não existem $A_i \in \mathbb{I}$ e $A_e \in \mathbb{E}$ tal que $A_i \subset A_e$ ou $A_e \subset A_i$.*

Esta segunda classe será chamada de Pr_2 . A classe na qual arcos propriamente contidos são proibidos em todo $\mathbb{I} \cup \mathbb{E}$ é a classe $Pr_1 \cap Pr_2$.

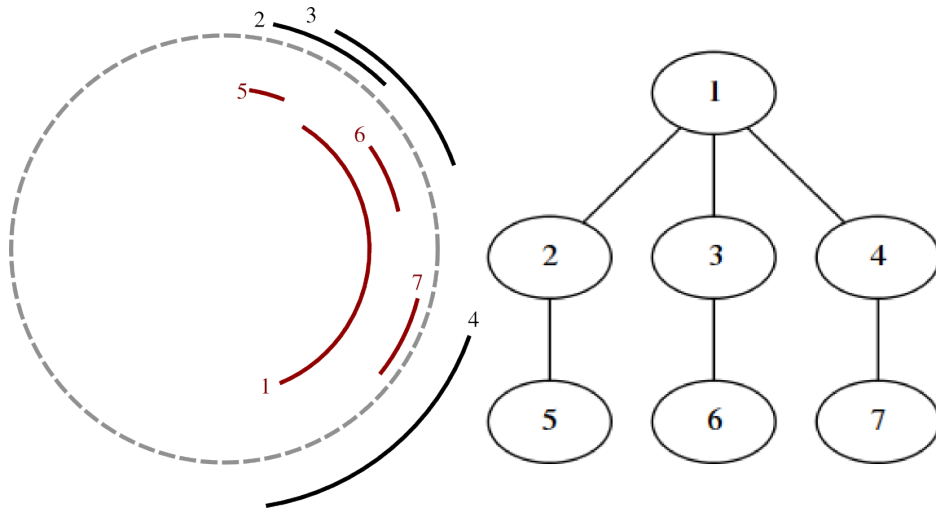


Figura 15 – O grafo forquilha, e um modelo bi-arco-circular do mesmo demonstrando que o mesmo satisfaz a definição de Pr_2

Sabemos, por exemplo, que o grafo “forquilha”, apresentado na Figura 15 juntamente com um modelo sem arcos de propriamente contidos em arcos da família oposta, é proibido para a classe Pr_1 (BASU et al., 2013), mas não para a classe Pr_2 .

Uma de nossas conjecturas a respeito da classe envolve a possibilidade de que $Pr_1 \subset Pr_2$. No momento presente, não se conhece um grafo G tal que $G \in Pr_1 - Pr_2$.

3.4.2 A Subclasse Helly

O conceito de famílias Helly de conjuntos (HELLY, 1923; BOLLOBAS, 1998) é utilizado na definição de várias classes diferentes de grafos (SZWARCFITER, 1997; GROSHAUS; SZWARCFITER, 2008; GROSHAUS; SZWARCFITER, 2007), e com uma adaptação de sua definição para pares de famílias (GROSHAUS; SZWARCFITER, 2010), pode-se formular a definição de uma subclasse Helly de grafos bi-arco-circulares.

A definição de *modelos bi-arco-circulares Helly* apresentada a seguir é de nossa autoria, e é análoga ao conceito de famílias bipartido-Helly de (GROSHAUS; SZWARCFITER, 2010).

Definição 11. Um modelo bi-arco-circular $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ é dito *Helly* se, para todo par de subconjuntos $\mathbb{I}' \subset \mathbb{I}$ e $\mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$ tal que todo elemento de \mathbb{I}' intersecta todo elemento de \mathbb{E}' , existe um ponto p sobre C que pertence a todos os elementos de $\mathbb{I}' \cup \mathbb{E}'$.

Os grafos bi-arco-circulares *Helly*, então, são definidos simplesmente como grafos que admitem um modelo bi-arco-circular Helly.

É fácil verificar que esta classe é hereditária para subgrafos induzidos, pois, para qualquer modelo Helly, o modelo resultante de se remover um arco também é Helly. Enunciamos e provamos esta afirmação, de modo mais formal, a seguir.

Lema 24. *A subclasse bi-arco-circular Helly é hereditária para subgrafos induzidos.*

Demonstração. Basta provar que um modelo não-Helly não pode se tornar Helly ao se adicionar arcos (pela recíproca, se um modelo é Helly, então o modelo resultante de uma remoção de arcos também necessariamente é).

Suponha que um certo modelo $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ não satisfaz a propriedade Helly. Nesse caso, existe alguma biclique no grafo correspondente tal que os subconjuntos $\mathbb{I}' \subset \mathbb{I}$ e $\mathbb{E}' \subset \mathbb{E}$ que a representam são tais que não existe um ponto em comum a todos os elementos de $\mathbb{I}' \cup \mathbb{E}'$. A biclique representada por $\mathbb{I}' \cup \mathbb{E}'$ necessariamente será uma biclique ou subconjunto de alguma biclique no grafo correspondente ao modelo resultante de se adicionar algum novo arco a \mathbb{I} ou a \mathbb{E} , e a biclique em questão não terá ponto em comum entre seus arcos. \square

Analogamente à definição de Helly para grafos bi-arco-circulares, e para facilitar provas posteriores, definimos grafos bi-intervalo Helly.

Definição 12. *Um par de famílias de intervalos (\mathbb{A}, \mathbb{B}) que representa um grafo bi-intervalo G é dito Helly se e somente se, para qualquer $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ que represente uma biclique em G , existe um ponto p sobre a reta real tal que para todo $S \in \mathbb{S}$, tem-se $p \in S$. Reciprocamente, um grafo bi-intervalo G é dito Helly se ele pode ser representado por um par de famílias de intervalos Helly.*

Como mencionado anteriormente, as definições de grafos bi-arco-circulares Helly e bi-intervalo Helly são análogas à propriedade bipartido-Helly. A definição da propriedade de bipartido-Helly, como descrito por (GROSHAUS; SZWARCFITER, 2010) depende de uma longa lista de outras definições e não será inclusa aqui por brevidade.

Um primeiro resultado simples a respeito das classes, e que pode ser facilmente verificado, é o seguinte.

Lema 25. *Todo grafo bi-intervalo Helly é, também, bi-arco-circular Helly.*

Demonstração. Seja (\mathbb{A}, \mathbb{B}) um par de famílias Helly que representa um grafo bi-intervalo G . Se C for um círculo de comprimento $n + 1$, onde n é o extremo mais à direita dentre

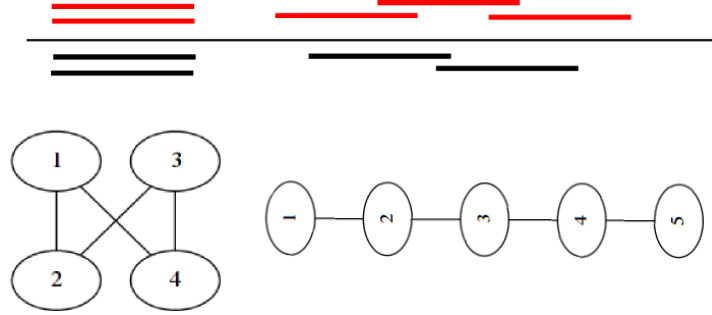


Figura 16 – Os grafos $K_{2,2}$ e P_5 e, acima deles, seus modelos bi-intervalo Helly.

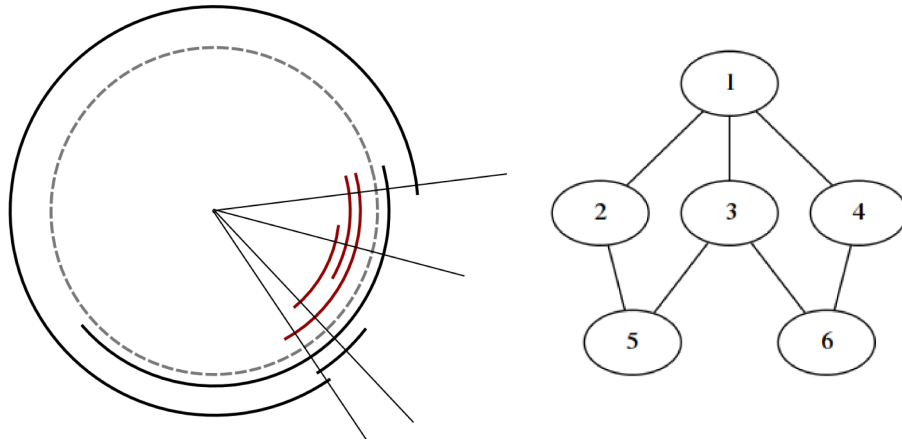


Figura 17 – O grafo dominó juntamente com seu modelo bi-arco-circular Helly, com os pontos biclique marcados.

os extremos dos intervalos de $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, e definirmos um ponto $p \in C$ como o ponto inicial, podemos facilmente “colar” os intervalos de \mathbb{A} e \mathbb{B} sobre o círculo, onde as posições de seus extremos na reta serão o deslocamento no sentido horário de seus extremos a partir do ponto p , como feito na prova do Lema 20. É fácil verificar que $(C, \mathbb{A}, \mathbb{B})$ assim definido é um modelo bi-arco-circular do mesmo grafo que preserva os pontos de interseção das bicliques. \square

É fácil verificar, também, que $K_{2,2}$ e P_n , para todo $n > 0$, são bi-intervalo Helly. A Figura 16 apresenta modelos bi-intervalo Helly de $K_{2,2}$ e P_5 . No caso de P_n , para $n \geq 2$, a ideia do modelo bi-intervalo Helly é encadear os vértices do caminho de modo que o intervalo que representa o k -ésimo vértice tenha seu extremo esquerdo contido no arco que representa o $k - 2$ -ésimo vértice para todo $k > 2$.

Além disso, sabemos que a classe bi-intervalo Helly é subclasse própria da classe bi-arco-circular Helly, pois o grafo “dominó”, apresentado na Figura 17, é bi-arco-circular Helly mas não é bi-intervalo Helly.

Lema 26. *O grafo dominó não é bi-intervalo Helly.*

Demonstração. Suponha que temos um modelo bi-intervalo Helly do grafo dominó. Nesse caso, os intervalos que representam a biclique $\{1, 2, 3, 4\}$ tem que passar pelo mesmo ponto na reta. Em particular, teremos que os intervalos correspondentes a 2, 3 e 4 passarão pelo mesmo ponto. Para que seja possível desenhar um intervalo correspondente a 5 e um correspondente a 6, é necessário que exista um ponto p comum a 2 e 3 mas não a 4, e outro ponto q comum a 3 e 4 mas não a 2.

É fácil verificar que o ponto comum a 2, 3 e 4, que a partir daqui chamaremos de r , está entre p e q na reta real. Suponha, sem perda de generalidade, que os pontos p, r e q são encontrados nessa ordem da esquerda para a direita. O intervalo 5 passa por p mas tem seu extremo direito antes de r , e o intervalo 6 passa por q e tem seu extremo esquerdo depois de r .

Pela existência da biclique $\{1, 3, 5, 6\}$, é necessário que os intervalos 5 e 6 se intersectem, mas isso só é possível se um deles passar por r , o que leva o modelo a ficar incorreto, pois o intervalo que cruzar r terá interseção com um intervalo correspondente a algum elemento de $\{2, 3, 4\}$ que não é adjacente ao vértice que ele representa. \square

Como corolário do Lema 26, tem-se um grafo proibido para a classe bi-arco-circular Helly.

Corolário 27. *O grafo obtido ao se adicionar, ao dominó, uma componente conexa contendo pelo menos uma aresta não é bi-arco-circular Helly.*

Demonstração. Como o grafo dominó não é bi-intervalo Helly, todo modelo bi-arco-circular Helly $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ do grafo dominó será tal que qualquer ponto no círculo está contido em pelo menos um arco de $\mathbb{I} \cup \mathbb{E}$. Se adicionarmos um par de arcos que representem uma aresta da nova componente conexa, um dos arcos que representa um vértice desta aresta, que chamaremos de A_i , estará em \mathbb{I} , e outro, que chamaremos de A_e , estará em \mathbb{E} . Como qualquer ponto do círculo é coberto por um arco de \mathbb{I} ou por um arco de \mathbb{E} pertencente ao modelo do grafo dominó, qualquer que seja o ponto de interseção entre A_i e A_e , teremos que A_i intersecta um arco de $\mathbb{E} - \{A_e\}$ ou A_e intersecta um arco de $\mathbb{I} - \{A_i\}$, fazendo com que o grafo resultante do modelo contenha uma aresta entre um vértice da componente conexa adicional e um vértice do dominó, não formando o grafo composto do dominó acrescido de uma componente conexa de pelo menos uma aresta como pretendido. \square

O lema a seguir fornece uma condição suficiente para um grafo bi-arco-circular apresentar a propriedade Helly.

Lema 28. *Um grafo bi-arco-circular G que não possui, como subgrafo induzido, nem $K_{1,3}$, nem um grafo composto de um C_n (com n par, e $n > 4$) juntamente com um vértice isolado é bi-arco-circular Helly.*

Demonstração. Suponha que G não possui como subgrafos induzidos nem $K_{1,3}$, nem um ciclo par de tamanho maior que 4 juntamente com um vértice isolado.

Primeiro, vamos supor que G possui um C_n , com n par e $n > 4$, induzido. Neste caso teremos que o C_n é uma componente conexa por si só, pois qualquer vértice que fizer aresta com um elemento de C_n formará um $K_{1,3}$. Qualquer modelo bi-arco-circular $(C, \mathbb{I}, \mathbb{E})$ de C_n , seja ele Helly ou não, será tal que $\mathbb{I} \cup \mathbb{E}$ cobrem todo o círculo, o que significa que C_n é a única componente conexa do grafo, pois qualquer componente conexa que não seja um vértice isolado não poderá ser inclusa no modelo: se existe uma componente conexa além do C_n , e essa componente contém uma aresta, então qualquer par I, E de arcos que sejam escolhidos para representar a aresta (um arco $I \in \mathbb{I}$ e outro em $E \in \mathbb{E}$) será tal que I intersecta um elemento de \mathbb{E} pertencente ao modelo de C_n ou E intersecta um elemento de \mathbb{I} pertencente ao C_n , fazendo com que o modelo bi-arco-circular não represente corretamente a componente conexa que deve estar separada de C_n .

Deste modo, basta criar um modelo helly para C_n , o que é simples, e pode ser feito através do seguinte método: começamos separando um círculo C em $2|V(G)|$ pontos consecutivos igualmente espaçados no sentido horário, que chamaremos de $p_0, \dots, p_{(2|V(G)|-1)}$, e então construímos o modelo com o seguinte algoritmo, onde os arcos A_i estão no conjunto \mathbb{I} para i par, e \mathbb{E} para i ímpar.

Algoritmo 2: Construir Modelo Helly de Ciclo Par(n)

```

 $n \leftarrow |V(G)|$ 
{Para o conjunto  $\mathbb{I}$ }
 $i \leftarrow 0$ 
 $j \leftarrow 0$ 
Enquanto  $i \leq n$ 
  Insira  $s(A_i)$  em  $p_j$ 
  Insira  $t(A_{i-2})$  em  $p_{j+1}$ 
   $j \leftarrow j + 4$ 
   $i \leftarrow i + 2$ 
{para o conjunto  $\mathbb{E}$ }
 $i \leftarrow 1$ 
 $j \leftarrow 2$ 
Enquanto  $i \leq n$ 
  Insira  $s(A_i)$  em  $p_j$ 
  Insira  $t(A_{i-2})$  em  $p_{j+1}$ 
   $j \leftarrow j + 4$ 
   $i \leftarrow i + 2$ 

```

Todas as subtrações para índices de arcos no algoritmo são módulo n , e as somas para índice de ponto são mod $2n$.

A Figura 18 mostra o modelo resultante da execução do Algoritmo 2 para $n = 6$. Observe que, em um modelo construído pelo algoritmo, temos que, para qualquer i , $s(A_i) = p_{2i}$ e $t(A_i) = p_{2(i+2)+1} = p_{2i+5}$, novamente, com todas as somas e multiplicações em modulo $2n$.

Nesse caso, temos que todos os arcos tem comprimento de 5 vezes o tamanho do intervalo entre quaisquer pontos p consecutivos. Logo, para todo i , um arco A_j intersecta A_i se e somente se

$2j \in \{2i - 5, 2i - 4, \dots, 2i + 5\}$, ou seja, se e somente se $j \in \{i - \frac{5}{2}, i - \frac{4}{2}, \dots, i + \frac{4}{2}, i + \frac{5}{2}\}$.

Como todo j é inteiro, tem-se $j \in \{i - 2, i - 1, \dots, i + 2\}$ (novamente com todas as somas e subtrações cíclicas em módulo $2n$).

Portanto, um arco A_i só intersecta os arcos $A_{i-2}, A_{i-1}, A_{i+1}$ e A_{i+2} , e como A_{i-2} , A_i e A_{i+2} estão na mesma família de arcos do modelo (\mathbb{I} se i for par, e \mathbb{E} caso contrário), temos que A_i só intersecta A_{i-1} e A_{i+1} dentre os arcos que estão na família oposta do modelo, fazendo com que o vértice correspondente a A_i só tenha, como vizinhos, os vértices correspondentes a A_{i-1} (seu antecessor) e A_{i+1} (seu sucessor) no grafo correspondente ao modelo. Ou seja, o modelo corresponde a C_n .

Todas as bicliques de um ciclo par de $n > 4$ vértices serão compostas por trios

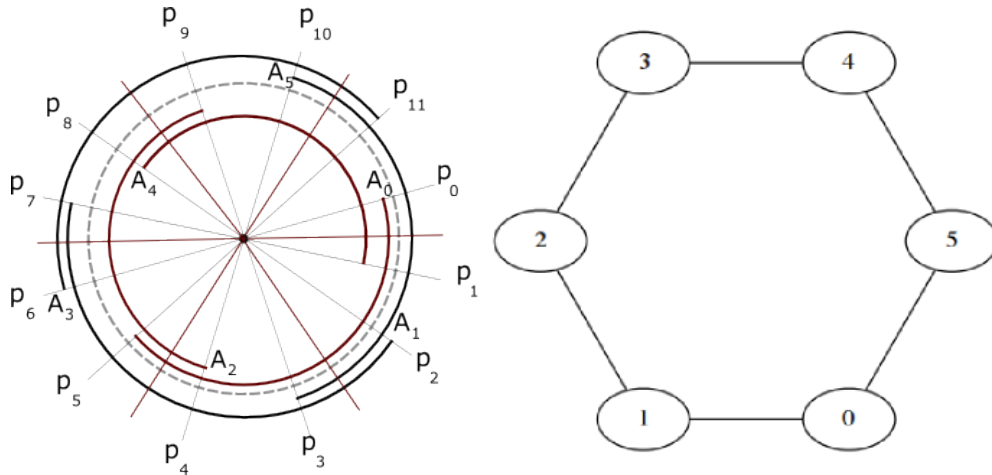


Figura 18 – Um modelo de C_6 construído pelo algoritmo 2, com os pontos p assinalados no círculo

de vértices consecutivos e é fácil verificar que, para qualquer i , os arcos A_{i-1}, A_i, A_{i+1} no modelo construído pelo algoritmo passam todos por qualquer ponto que esteja entre $p_{2(i+1)}$ e $p_{2(i+1)+1}$, ou seja, todas as bicliques do ciclo são tais que seus arcos correspondentes no modelo passam por um ponto em comum, implicando que o modelo obedece a propriedade Helly. Logo, todo ciclo par possui um modelo bi-arco-circular Helly válido.

Agora, suponha que G não possui nenhum C_n , para $n > 4$. Neste caso, todas as componentes de G serão caminhos ou $K_{2,2}$, pois qualquer outra componente conexa conteria ou um $K_{1,3}$ ou um ciclo par de ordem maior que 4. Logo, temos que todas as componentes conexas serão bi-intervalo Helly, o que implica que grafo composto pelas componentes também será bi-intervalo Helly, bastando dispor modelos Helly de cada componente lado a lado ao longo da reta real. Como G é bi-intervalo Helly, então, pelo Lema 25, G é bi-arco-circular Helly. \square

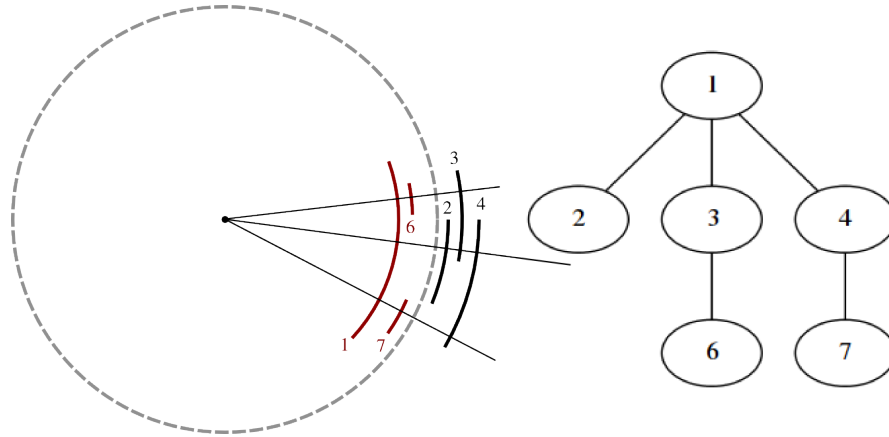


Figura 19 – Modelo bi-arco-circular Helly do grafo resultante de se remover o vértice 5 do grafo forquilha

O Lema 28 é uma condição suficiente, mas não necessária, pois o próprio $K_{1,3}$ sozinho é bi-arco-circular Helly.

Além disso, sabe-se que o grafo “forquilha” apresentado na subseção anterior é minimalmente não bi-arco-circular Helly.

Lema 29. *O grafo forquilha é minimalmente não bi-arco-circular Helly.*

Demonstração. Basta demonstrar que o grafo forquilha não é bi-arco-circular Helly e que todos seus subgrafos induzidos o são.

Suponha que temos um modelo Helly da forquilha. Neste caso, os arcos correspondentes à biclique $\{1, 2, 3, 4\}$ possuem um ponto em comum. Seja A_i o arco correspondente ao vértice i , para $1 \leq i \leq 7$. Em particular, temos que os arcos correspondentes a $\{2, 3, 4\}$ terão um ponto em comum, o que implica que existe um par de elementos deles cuja união cobre a união dos três. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $A_2 \cup A_3 = A_2 \cup A_3 \cup A_4$. Neste caso, não haverá um arco que possa representar as adjacências de 7, pois será impossível intersectar A_4 sem intersectar A_3 ou A_2 .

Agora, pensemos nos subgrafos induzido resultantes da remoção de um vértice. Se removermos o vértice 1, o grafo resultante é composto de três componentes conexas contendo exatamente uma aresta e mais nada, satisfazendo a propriedade bi- intervalo Helly. Se removermos um vértice dentre 2, 3 e 4, ficamos com um caminho e um vértice isolado, também bi-intervalo Helly.

Se removemos um vértice dentre 5, 6 e 7, é possível encontrar um modelo Helly como o da Figura 19.

□

Os estudos feitos a respeito da classe bi-arco-circular Helly tem como motivação descobrir e explicitar propriedades que possam levar a uma caracterização, seja ela parcial ou completa, dos grafos bi-arco-circulares Helly. Uma caracterização parcial seria uma condição necessária e suficiente para um grafo ser bi-arco-circular Helly dado que o mesmo é bi-arco-circular, enquanto uma caracterização total seria uma condição necessária e suficiente para qualquer grafo.

CONCLUSÃO

Ao longo dos estudos feitos durante o curso e apresentados nesta dissertação, uma série de propriedades da classe bi-arco-circular e suas subclasses foram descobertas e vários resultados bibliográficos sobre a classe e classes relacionadas foram estudados.

Apresentamos um conjunto de grafos proibidos para classe bi-arco-circular, e propusemos a conjectura de uma potencial caracterização que, se verdadeira, leva a um algoritmo polinomial de reconhecimento.

Demonstramos que a classe bi-intervalo, bem como a subclasse bipartida dos grafos arco-circulares, são subclasses próprias da classe bi-arco-circular.

Mostramos duas definições diferentes para grafos bi-arco-circulares próprios: a usual, formulada e estudada em trabalhos anteriores, e uma alternativa, de nossa autoria. Apresentamos um grafo que satisfaz a definição alternativa mas não a usual, e conjecturamos que a classe própria segundo a definição usual pode ser subclasse da classe própria segundo a definição alternativa.

Definimos uma subclasse Helly para grafos bi-arco-circulares, uma subclasse Helly analogamente definida para grafos bi-intervalo, e descobrimos uma pequena série de grafos proibidos para a classe bi-arco-circular Helly que definimos. Descobrimos uma condição suficiente fraca, e uma condição necessária também fraca, para um grafo bi-arco-circular pertencer à subclasse Helly.

Demonstramos que o problema de reconhecimento da classe bi-arco-circular está contido em NP .

Estudamos um resultado de (BASU et al., 2013), reescrevemos sua prova e as definições das quais ela depende de modo a deixá-las mais compreensíveis, e apontamos uma possível ambiguidade na definição de *matrizes suplementares* escrita pelos autores.

TRABALHO FUTURO E QUESTÕES EM ABERTO

As seguintes questões em aberto são deixadas para trabalho futuro:

- Avaliar a conjectura proposta a respeito da possível caracterização de grafos bi-arco-circulares.
- Formular um algoritmo eficiente para reconhecimento da classe.

- Determinar a complexidade computacional do problema de reconhecimento de grafos bi-arco-circulares.
- Determinar a relação entre as duas classes diferentes de grafos bi-arco-circulares próprios apresentadas.
- Caracterizar grafos bi-arco-circulares Helly e bi-intervalo Helly.
- Estudar a subclasse bi-arco-circular unitária, definida como a classe dos grafos bi-arco-circulares que admitem modelos onde todos os arcos tem o mesmo comprimento.
- Estudar a complexidade de problemas de otimização, como coloração, biclique máxima e conjunto independente máximo, para grafos bi-arco-circulares, tendo como entrada os grafos ou os modelos.

REFERÊNCIAS

- BASU, A. et al. Circular-arc bigraphs and its subclasses. *Journal of Graph Theory*, v. 73, n. 4, p. 361–376, 2013. ISSN 1097-0118. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.21681>>.
- BOLLOBAS, B. *Combinatorics: Set Systems, Hypergraphs, Families of Vectors and Combinatorial Probability*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1998. ISBN 0521337038.
- BONOMO, F. et al. Partial characterizations of circular-arc graphs. *Journal of Graph Theory*, v. 61, p. 289–306, 2009. Disponível em: <http://www-2.dc.uba.ar/personal/fbonomo/docs/papers/JGT_ac_final.pdf>.
- Brandstädt, A.; Kratsch, D. *On the restriction of some NP-complete graph problems to permutation graphs*. 1985. Fundamentals of computation theory, Proc. 5th Int. Conf., Cottbus/Ger. 1985, Lect. Notes Comput. Sci. 199, 53-62 (1985).
- DAS, A.; CHAKRABORTY, R. New characterizations of proper interval bigraphs and proper circular arc bigraphs. In: GANGULY, S.; KRISHNAMURTI, R. (Ed.). *Algorithms and Discrete Applied Mathematics*. Springer International Publishing, 2015, (Lecture Notes in Computer Science, v. 8959). p. 117–125. ISBN 978-3-319-14973-8. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-14974-5_12>.
- GROSHAUS, M.; SZWARCFITER, J. Biclique-helly graphs. *Graphs and Combinatorics*, v. 23, p. 633 – 645, 2007.
- GROSHAUS, M.; SZWARCFITER, J. On hereditary helly classes of graphs. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, v. 10, n. 1, 2008. ISSN 1365-8050. Disponível em: <<http://www.dmtcs.org/dmtcs-ojs/index.php/dmtcs/article/view/744>>.
- GROSHAUS, M.; SZWARCFITER, J. L. Biclique graphs and biclique matrices. *Journal of Graph Theory*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 63, n. 1, p. 1–16, 2010. ISSN 1097-0118. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/jgt.20442>>.
- HADWIGER, H.; DEBRUNNER, H. *Combinatorial geometry in the plane*. Holt, Rinehart and Winston, 1964. (Athena series). Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=ag6oAAAAIAAJ>>.
- HELL, P.; HUANG, J. Interval bigraphs and circular arc graphs. *J. Graph Theory*, v. 46, p. 313–327, 2004.
- HELLY, E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, Springer, Berlin/Heidelberg, v. 32, p. 175–176, 1923. ISSN 0012-0456; 1869-7135/e.
- KLEE, V. Research problems: What are the intersection graphs of arcs in a circle? *American Mathematics Monthly*, v. 76, n. 7, p. 810–813, 1969.
- LIN, M. C.; SZWARCFITER, J. L. Characterizations and recognition of circular-arc graphs and subclasses: A survey. *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 18, p. 5618–5635, 2009. ISSN 0012-365X. Combinatorics 2006, A Meeting

in Celebration of Pavol Hell's 60th Birthday (May 1–5, 2006). Disponível em:
<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X08002161>.

MCCONNELL, R. M. Linear-time recognition of circular-arc graphs. *Algorithmica*, v. 37, n. 2, p. 93–147, 2003.

MÜLLER, H. Recognizing interval digraphs and interval bigraphs in polynomial time. *Discrete Appl. Math.*, Elsevier (North-Holland), Amsterdam, v. 78, n. 1-3, p. 189–205, 1997. ISSN 0166-218X.

SEN, M.; DAS, S.; WEST, D. B. Circular-arc digraphs: A characterization. *Journal of Graph Theory*, Wiley Subscription Services, Inc., A Wiley Company, v. 13, n. 5, p. 581–592, 1989. ISSN 1097-0118. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/jgt.3190130508>.

SOULIGNAC, F. J. *Sobre Grafos Arco-Circulares Propios y Helly*. Tese (Doutorado) — Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Computacion, 2010.

Szwarcfiter, J. L. Recognizing clique-Helly graphs. *Ars Comb.*, Charles Babbage Research Centre, Winnipeg, MB, v. 45, p. 29–32, 1997. ISSN 0381-7032.

TROTTER JR., W. T.; MOORE JR., J. I. Characterization problems for graphs, partially ordered sets, lattices, and families of sets. *Discrete Mathematics*, v. 16, n. 4, p. 361–381, 1976. ISSN 0012-365X. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X76800118>.

TUCKER, A. Matrix characterizations of circular-arc graphs. *Pacific J. Math.*, Pacific Journal of Mathematics, A Non-profit Corporation, v. 39, n. 2, p. 535–545, 1971. Disponível em: <http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102969574>.